



Politechnika Morska
Zakład Matematyki



Arkadiusz Misztela

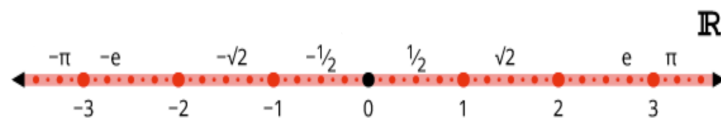
LICZBY RZECZYWISTE

Analiza Matematyczna I
Materiał Pomocniczy do Zajęć

1 stycznia 2024

1 Definicja aksjomatyczna liczb rzeczywistych

Intuicyjne pojęcia liczby naturalnej, całkowitej, wymiernej i rzeczywistej są znane wszystkim ze szkoły średniej. Mówiąc poglądowo, chodzi o liczby, które mają skończone lub nieskończone rozwinięcia dziesiętne. Można je interpretować jako punkty na prostej:



Znane są trzy metody precyzyjnego opisu zbioru liczb rzeczywistych: metoda aksjomatyczna, metoda Cantora i metoda Dedekinda. Przedstawimy tutaj metodę aksjomatyczną, która jest w istocie wyodrębnieniem najważniejszych własności zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja 1.1. Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór $\mathbb{R}$, złożony z co najmniej dwóch elementów 0 i 1 , który spełnia następujące aksjomaty:

I. Aksjomaty Ciała Przemienne. Dane są następujące działania w zbiorze $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ — dodawanie, } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ — mnożenie,}$$

które mają własności:

- (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$ [przemienność];
- (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [łączność];
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x, 1 \cdot x = x$ [elementy neutralne];
- (d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y = 0$ [element przeciwny];
- (e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} x \cdot y = 1$ [element odwrotny];
- (f) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ [rozdzielność mnożenia względem dodawania].

II. Aksjomaty Porządku. Dla każdych dwóch elementów $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi co najmniej jedna z dwóch zależności $x \leq y$ lub $y \leq x$ oraz spełnione są warunki:

- (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \iff (x = y)$;
- (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} (x \leq y) \implies (x + z) \leq (y + z)$;
- (c) $\forall x, y \in \mathbb{R} ((0 \leq x) \wedge (0 \leq y)) \implies (0 \leq x \cdot y)$;
- (d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \implies (x \leq z)$.

Jeżeli $x \leq y$ oraz $x \neq y$, to fakt ten będziemy zapisywać $x < y$ lub $y > x$.

III. Aksjomat Ciągłości. Jeśli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste oraz $a \leq b$ dla każdych $a \in A$ i $b \in B$, to istnieje element $c \in \mathbb{R}$ taki, że $a \leq c \leq b$ dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$.

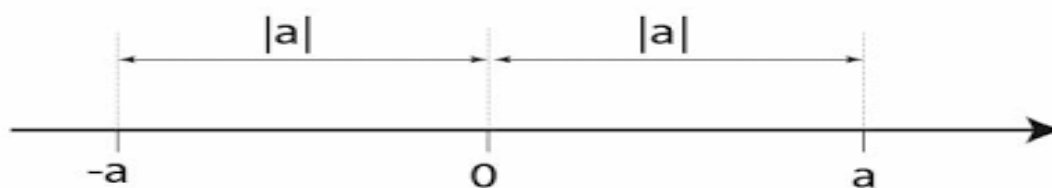
Uwaga 1.2. Używając bardziej zwięzłego języka, można krótko powiedzieć, że $\mathbb{R}$ jest ciałem liniowo uporządkowanym, spełniającym aksjomat ciągłości.

Sprawą do wyjaśnienia pozostaje kwestia jednoznaczności i istnienia zbioru $\mathbb{R}$ spełniającego powyższe aksjomaty. Można pokazać, że powyższe aksjomaty opisują zbiór $\mathbb{R}$ jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu struktur. Odpowiedź na pytanie, czy istnieje zbiór $\mathbb{R}$ spełniający wymienione wyżej aksjomaty, wymaga skonstruowania takiego zbioru, a więc opisanie metody Cantora lub Dedekinda.

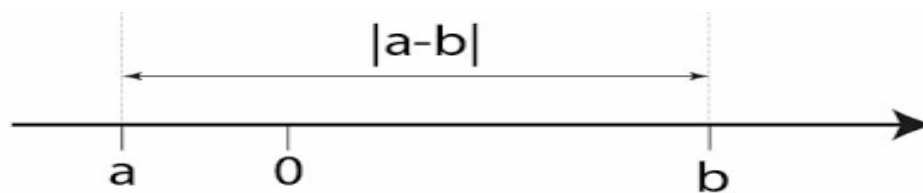
Definicja 1.3. Niech $a \in \mathbb{R}$. Wartością bezwzględną (lub modulem) liczby a nazywamy liczbę $|a| \in \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

Geometrycznie moduł liczby $a \in \mathbb{R}$ interpretujemy jako odległość liczby a od zera:



Ogólniej mówiąc wartość $|a - b|$ odpowiada długości odcinka łączącego liczby a i b :



Własności 1.4. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $c > 0$:

- | | |
|---|--|
| (a) $ a \geq 0$, | (b) $ a = -a $, |
| (c) $ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$, | (d) $ a = c \Leftrightarrow a = c \vee a = -c$, |
| (e) $ a + b \leq a + b $, | (f) $ a - b \leq a - b $, |
| (g) $ a \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$, | (h) $ a \geq c \Leftrightarrow a \leq -c \vee a \geq c$, |
| (i) $\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$, o ile $b \neq 0$, | (j) $ ab = a b $. |

Zadanie 1.5. Rozwiązać równania i nierówności modułowe:

- (a) $|2x - 1| = -3$, (b) $|8x^2 - 1| = 3$, (c) $|x - 2| = x - 2$,
 (d) $2x^2 - |x| = 1$, (e) $|4x - 1| \leq 8$, (f) $|x^2 + x - 1| > 1$,
 (g) $|x - 1| + |2x - 5| < 9$, (h) $||x - 1| - 1| \leq 1$, (i) $|3 - |x + 5|| \geq 6$.

Na zakończenie tej sekcji rozpatrzmy **rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych** $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Rozszerzamy relację porządku w zbiorze $\mathbb{R}$ na zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ następująco:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

Ponadto w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ wprowadzamy rozszerzoną arytmetykę podobnie jak w zbiorze $\mathbb{R}$; przyjmując dodatkowo następujące działania na liczbach nieskończonych:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x + (+\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$
 (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : x \cdot (+\infty) = (-x) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = (-x) \cdot (+\infty) = -\infty;$
 (c) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty;$
 (d) $-(-\infty) = +\infty$ oraz $-(+\infty) = -\infty;$
 (e) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$

Zauważmy, że żadne z powyższych działań nie dotyczy sumy $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, iloczynu $0 \cdot (\pm\infty)$ ani ilorazu $\frac{\pm\infty}{0}$. Są to tzw. **wyrażenia nieoznaczone**. Do działań tego typu powrócimy później.

2 Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Definicja 2.1. Zbiorem liczb naturalnych będziemy nazywać najmniejszy podzbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zawierający 1 oraz posiadający tę własność, że jeśli zawiera pewną liczbę x , to zawiera również $x + 1$. Zbiór liczb naturalnych będziemy oznaczać $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Przykłady 2.2. Podzbiory zbioru liczb naturalnych:

- (a) $\{2, 3, 5, 7, \dots\}$ – liczby pierwsze;
 (b) $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ – liczby parzyste;
 (c) $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots\}$ – liczby nieparzyste;

Twierdzenie 2.3 (zasada indukcji matematycznej). Niech $A \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem takim, że $1 \in A$ oraz $\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$. Wówczas $A = \mathbb{N}$.

Nierówność Bernoulliego: Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha \geq -1$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Dowód. Ustalmy liczbę rzeczywistą $\alpha \geq -1$. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha\}$. Zauważmy, że $1 \in A$, gdyż $(1 + \alpha)^1 = 1 + 1\alpha$. Przypuśćmy, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla n . Pokażemy, że zachodzi dla $n + 1$. Istotnie,

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)^n(1 + \alpha) \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha) \\ &= 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 = 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)\alpha. \end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$. Na mocy zasady indukcji matematycznej $A = \mathbb{N}$. Oznacza to, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla każdej liczby naturalnej. $\square$

Wzór dwumienny Newtona: Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

gdzie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

jest tzw. *symbolem Newtona*; ponadto $0! = 1$ oraz $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$\binom{0}{0}$						Trójkąt Pascala					1																					
$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$								1		1																				
$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$					1		2		1																	
$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		0! = 1					1		3		3		1													
$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$							1		4		6		4		1									
$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$							1		5		$\binom{5}{2}$		10		5		1					
$\binom{6}{0}$		$\binom{6}{1}$		$\binom{6}{2}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{6}{4}$		$\binom{6}{5}$		$\binom{6}{6}$							1		6		15		20		15		6		1	

Zadanie 2.4. Metodą indukcji matematycznej wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n :

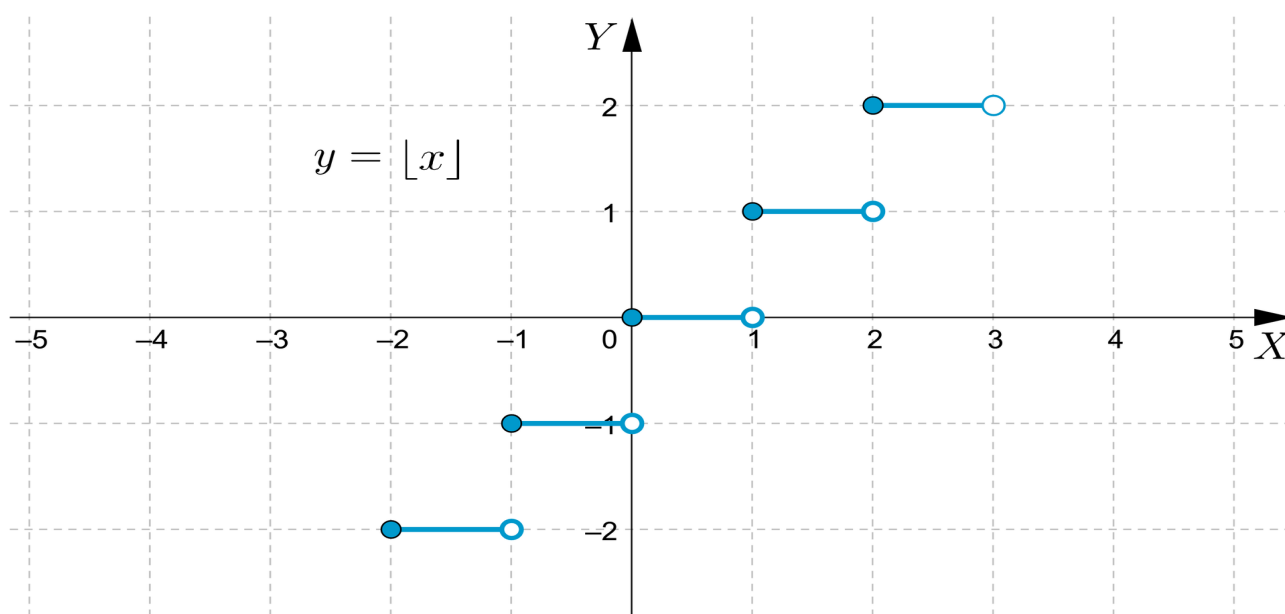
- (a) $4^n \geq n^2$, (b) $(n + 1)! \geq 2^n$, (c) $\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \in \mathbb{N}$,
 (d) $3 \mid n^3 + 2n$, (e) $3 \mid 7^n - 1$, (f) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Definicja 2.5. Zbiorem liczb całkowitych będziemy nazywać najmniejszy podzbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zawierający 0 oraz posiadający tę własność, że jeśli zawiera pewną liczbę x , to zawiera również $x - 1$ oraz $x + 1$. Zbiór liczb całkowitych będziemy oznaczać

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Twierdzenie 2.6 (zasada Archimedesesa). *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba całkowita $m \in \mathbb{Z}$ taka, że $m \leq x < m + 1$.*

Uwaga 2.7. Liczbę m z Twierdzenia 2.6 nazywamy częścią całkowitą liczby rzeczywistej x i oznaczamy symbolem $\lfloor x \rfloor$. Łatwo zauważyć, że $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (Funkcja ang. „floor” zaokrągla liczbę rzeczywistą w dół do najbliższej liczby całkowitej).



Zadanie 2.8. Naszkicować wykresy następujących funkcji:

(a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicja 2.9. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ definiujemy jak następuje

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jeżeli liczba należy do zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to nazywamy ją niewymierną.

Twierdzenie 2.10 (gęstość zbioru $\mathbb{Q}$). *Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, jeśli $a < b$, to istnieje liczba $w \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < w < b$.*

Twierdzenie 2.11. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $\beta > 0$ taka, że $\beta^n = \alpha$. Liczbę β nazywamy pierwiastkiem n -tego stopnia z α i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{\alpha}$.

Nie istnieje liczba wymierna $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $x^2 = 2$.

Dowód. Zastosujemy metodę dowodu nie wprost. Przypuśćmy, że taka liczba wymierna istnieje, tzn. mamy liczbę $x \in \mathbb{Q}$ i $x^2 = 2$. Bez utraty ogólności można założyć, że $x > 0$. Skoro $x \in \mathbb{Q}$, to $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ oraz są względnie pierwsze. Zatem $\frac{m^2}{n^2} = 2$, a więc $m^2 = 2n^2$. Jest jasne, że m^2 jest liczbą parzystą (bowiem $2|m^2$), zatem także m jest liczbą parzystą (bowiem liczba nieparzysta podniesiona do kwadratu jest liczbą nieparzystą). Stąd $m = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. A więc $4k^2 = 2n^2$, czyli także $2k^2 = n^2$. Stąd analogicznie jak wcześniej wnioskujemy, że n jest również liczbą parzystą. Tak więc największy wspólny dzielnik liczb m, n jest nie mniejszy niż 2. Jest to sprzeczne z przyjętym założeniem mówiącym, że liczby m, n są względnie pierwsze. $\square$

Zadanie 2.12. Wiedząc, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną pokazać, że liczby $1 + \sqrt{2}$ oraz $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ są również niewymierne.

Zadanie 2.13. Wiedząc, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną wyprowadzić zasadę gęstości liczb niewymiernych z Twierdzenia 2.10, tzn. pokazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$, to istnieje liczba niewymierna α taka, że $a < \alpha < b$.

3 Kresy dolne i górne zbiorów

Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $a \in A$ jest **elementem najmniejszym** zbioru A (piszemy $a = \min A$), jeżeli $a \in A$ oraz $\forall b \in A$ $a \leq b$; liczba $a \in A$ jest **elementem największym** zbioru A (piszemy $a = \max A$), jeżeli $a \in A$ oraz $\forall b \in A$ $b \leq a$, np. dla zbioru $A = (0, 1]$ mamy $\max A = 1$, ale $\min A$ nie istnieje.

Definicja 3.1. Powiemy, że niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $\forall x \in A$ $\alpha \leq x$; zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $\forall x \in A$ $x \leq \alpha$. Zbiór A jest *ograniczony*, gdy jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry. Dodatkowo przyjmujemy, że zbiór pusty jest ograniczony.

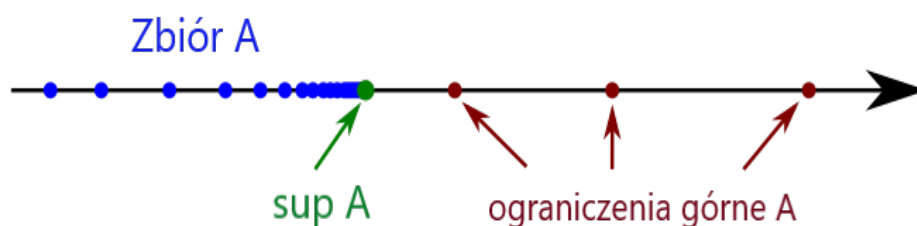
Przykłady 3.2. Zbiór $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie jest ograniczony z góry, ale jest ograniczony z dołu, np. przez 0, -1 , -3 . Natomiast zbiór $B = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie jest ograniczony z dołu, ale jest ograniczony z góry, np. przez 0, 1, 3. Zbiór ograniczony z góry i z dołu $D = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zbiór może nie być ograniczony ani z dołu, ani z góry $C = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Uwaga 3.3. Ograniczenia dolne i górne, o których mowa w powyższej definicji, nie są wyznaczone jednoznacznie. Chcielibyśmy mieć do dyspozycji ograniczenia, które są w jakimś sensie optymalne. Takimi ograniczeniami optymalnymi będą kresy.

Definicja 3.4. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym.

- (a) Mówimy, że liczba $M \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* zbioru A (w zapisie $M = \sup A$), jeżeli prawdziwe są zadania: $\forall x \in A \ x \leq M$ oraz $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ M - \varepsilon < x$.
- (b) Mówimy, że liczba $m \in \mathbb{R}$ jest *kresem dolnym* zbioru A (w zapisie $m = \inf A$), jeżeli prawdziwe są zadania: $\forall x \in A \ x \geq m$ oraz $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ m + \varepsilon < x$.

Uwaga 3.5. Kresy dolny i górny w powyższej definicji jest wyznaczony jednoznacznie, co wynika bezpośrednio z definicji.



Twierdzenie 3.6. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. Wówczas zachodzą równości:

$$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \ a \geq x\}, \quad \sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \ a \leq x\}.$$

Zauważmy, że pierwsza równość oznacza, iż $\inf A$ jest największym ograniczeniem dolnym, natomiast $\sup A$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym.

Przykłady 3.7. Kresy dolne i górne zbiorów:

- (a) $A = (-1, 1]$, $\inf A = -1$, $\sup A = 1$,
- (b) $B = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, 5)$, $\inf B = \sqrt{2}$, $\sup B = 5$,
- (c) $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\inf C = 0$, $\sup C = 1$,
- (d) $D = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\inf D = -1$, $\sup D = 1/2$.

Twierdzenie 3.8 (zasada istnienia kresów). Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest niepusty.

- Jeżeli zbiór A jest ograniczony z góry, to istnieje jego kres górny $\sup A$.
- Jeżeli A jest ograniczony z dołu, to istnieje jego kres dolny $\inf A$.

W szczególności zbiór niepusty i ograniczony ma kres dolny i górny.

Uwaga 3.9. Gdy niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, to wtedy przyjmujemy, że $\sup A := +\infty$. Analogicznie, jeśli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to wtedy przyjmujemy, że $\inf A := -\infty$. Również w przypadku zbioru pustego przyjmuje się następującą, wygodną umowę:

$$\sup \emptyset := -\infty, \quad \inf \emptyset := +\infty.$$

Zauważmy, że w tej sytuacji każdy zbiór $A \subset \mathbb{R}$ posiada kres górny i dolny.

Własności 3.10. Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ i dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

- | | |
|---|--|
| (a) $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$, | (b) $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$, |
| (c) $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$, $\alpha > 0$, | (d) $\inf(-A) = -\sup A$, |
| (e) $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$, | (f) $\inf A + \inf B \leq \inf(A + B)$, |
| (g) $A \leq B \Rightarrow \sup A \leq \inf B$, | (h) $\sup(-A) = -\inf A$. |

Zadanie 3.11. Zbadać ograniczoność oraz wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

- | | |
|--|---|
| (a) $A = \left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N} \right\}$, | (b) $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$, |
| (c) $C = \left\{ \frac{m}{n} \mid m < n, n, m \in \mathbb{N} \right\}$, | (d) $D = \left\{ \frac{m}{m+n} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$, |
| (e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 1\}$, | (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. |