



Politechnika Morska
Zakład Matematyki



Arkadiusz Misztela

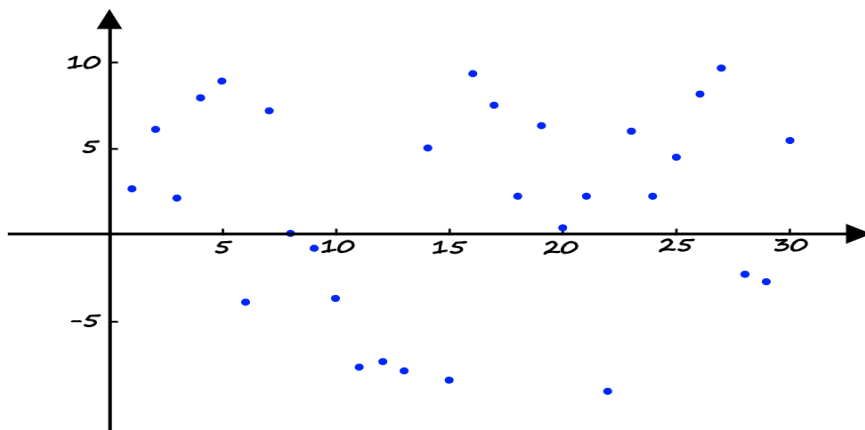
CIĄGI LICZBOWE

Analiza Matematyczna I
Materiał Pomocniczy do Zajęć

1 czerwca 2024

1 Definicja ciągu liczbowego

Definicja 1.1. Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartości tej funkcji oznaczamy przez x_n , a ciąg o takich wyrazach przez (x_n) .



Przykłady 1.2. Ciągi liczbowe określone wzorami:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x_n = 2^n, & \text{(b)} & x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & \text{(c)} & x_n = \sin n, \\ \text{(d)} & x_n = \frac{2^n}{n!}, & \text{(e)} & x_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + n + 1}, & \text{(f)} & x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{array}$$

Przykłady 1.3. Ciągi liczbowe określone rekurencyjnie:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x_1 = 7, x_{n+1} = x_n + 3, & \text{(b)} & x_1 = 3, x_{n+1} = 2x_n, \\ \text{(c)} & x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, & \text{(d)} & x_1 = 2, x_{n+1} = x_1 x_2 \dots x_n. \end{array}$$

Przykłady 1.4. Ciągi liczbowe określone opisowo:

- (a) $x_n = n$ -ta liczba pierwsza,
- (b) $x_n = n$ -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

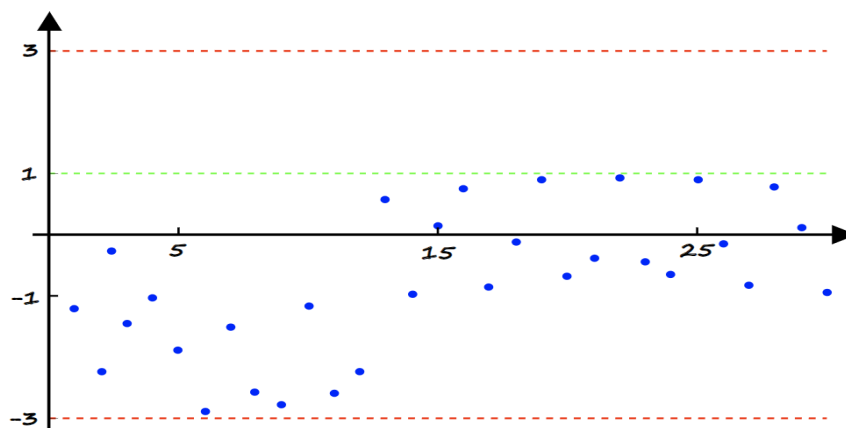
Zadanie 1.5. Wyznaczyć wzór określający n -ty wyraz ciągu:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & (x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots), & \text{(b)} & (x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots), \\ \text{(c)} & (x_n) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots), & \text{(d)} & (x_n) = (0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \dots), \\ \text{(e)} & (x_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots), & \text{(f)} & (x_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots). \end{array}$$

Definicja 1.6. Mówimy, że ciąg (x_n) jest ograniczony z góry [z dołu], jeżeli

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \quad [x_n \geq M],$$

ciąg jednocześnie ograniczony z góry i z dołu nazywamy ciągiem ograniczonym.

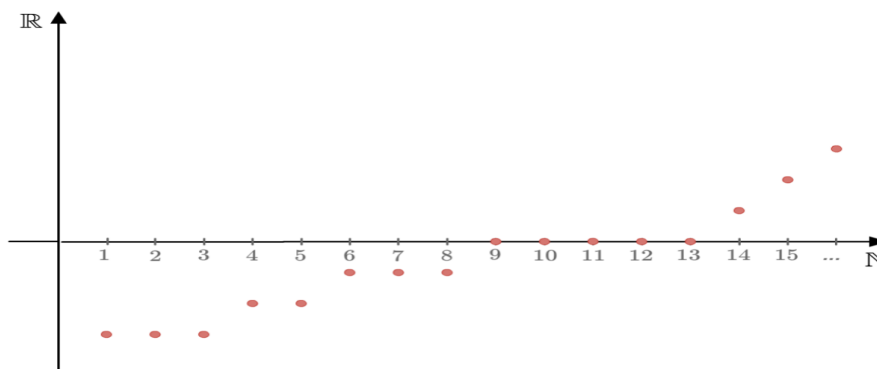


Zadanie 1.7. Zbadać ograniczoność ciągów:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| (a) $x_n = \frac{n}{1+n},$ | (b) $x_n = n^2 - n,$ | (c) $x_n = \ln \frac{1}{n},$ |
| (d) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$ | (e) $x_n = (-1)^n n^2,$ | (f) $x_n = \sin 3n,$ |
| (g) $x_n = \sqrt[n]{2} - 1,$ | (h) $x_n = \frac{2^n}{n!},$ | (i) $x_n = \arctg n.$ |

Definicja 1.8 (monotoniczność ciągu).

- Mówimy, że ciąg (x_n) jest rosnący [niemalejący], gdy $x_n < x_{n+1}$ [$x_n \leq x_{n+1}$] dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- Mówimy, że ciąg (x_n) jest malejący [nierosnący], gdy $x_n > x_{n+1}$ [$x_n \geq x_{n+1}$] dla każdego $n \in \mathbb{N}$.



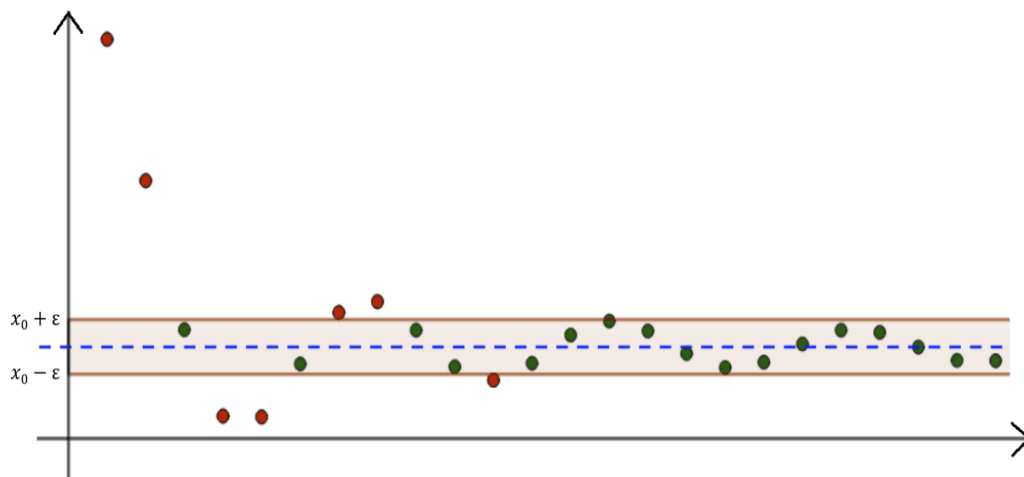
Zadanie 1.9. Zbadać monotoniczność ciągów:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| (a) $x_n = \frac{n}{1+n},$ | (b) $x_n = \frac{2n+1}{n^2+1},$ | (c) $x_n = \frac{1}{3^n},$ |
| (d) $x_n = 4n + \sqrt{n},$ | (e) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n},$ | (f) $x_n = (-1)^n 3^{-n},$ |
| (g) $x_n = \frac{n}{2^n},$ | (h) $x_n = 3^n - 2^n,$ | (i) $x_n = \frac{2^n}{n!}.$ |

2 Granica właściwa ciągu

Definicja 2.1. Mówimy, że ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny do *granicy właściwej* $x_0 \in \mathbb{R}$ [co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$] o ile zachodzi jeden z równoważnych warunków:

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \varepsilon;$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$



Uwaga 2.2. Definicję granicy właściwej ciągu możemy też wyrazić mniej formalnie:

- (a) Ciąg (x_n) jest zbieżny do x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla coraz większych n odległość między x_n oraz x_0 będzie się zmniejszać;
- (b) Ciąg (x_n) jest zbieżny do x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym otoczeniu x_0 znajduje się nieskończona liczba wyrazów, a poza tym otoczeniem tylko skończona liczba wyrazów.

Przykład 2.3. Rozważmy ciąg (x_n) dany wzorem $x_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Dla dowodu musimy pokazać, że spełniony jest jeden z warunków podanych w Definicji 2.1. Weźmy więc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Poszukiwać będziemy takiej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$, że $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ dla $n \geq n_0$. Niech na przykład $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Wówczas, dla $n \geq n_0$, mamy

$$n \geq n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wobec tego $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dla $n \geq n_0$. Zatem $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ dla $n \geq n_0$.

Przykład 2.4. Ciąg (x_n) dany wzorem $x_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny. Dla dowodu zauważmy, że przedział $(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2})$ nie może zawierać jednocześnie liczb -1 oraz 1 . Ponadto mamy $x_n = (-1)^n = 1$ dla n -parzystych oraz $x_n = (-1)^n = -1$ dla n -nieparzystych. Zatem poza przedziałem $(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2})$ będzie zawsze nieskończona liczba wyrazów ciągu $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Zatem ciąg ten nie może być zbieżny na mocy punktu (b) Uwagi 2.2.

Twierdzenie 2.5. Jeżeli ciągi (x_n) i (y_n) są zbieżne do granic właściwych, to

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$;
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, gdzie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$;
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^p$, gdzie $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$, gdzie $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Przykłady 2.6. Obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem Twierdzenia 2.5:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 2n^3}{1 - 6n^5} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^5} - 6} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} - \lim_{n \rightarrow \infty} 6} = \frac{3 - 0}{0 - 6} = -\frac{1}{2}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1}}{n + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{0 + 0}}{1 + 0} = 0$.

Zadanie 2.7. Obliczyć podane granice ciągów:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n}{n^3 + 1}$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3 + 1}}{n\sqrt{n^2 + 1}}$,
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$,
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 1}{3 + 2n^2} \right)^6$,
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^{15}}{(n^3 + 1)^{12}}$,
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^4 + 1})$,
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 8} - \sqrt{n^2 + 4})$.

Twierdzenie 2.8 (o trzech ciągach). Jeżeli dane są trzy ciągi liczbowe (x_n) , (y_n) i (z_n) takie, że $x_n \leq y_n \leq z_n$ dla każdego $n \geq n_0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, to ciąg (y_n) jest zbieżny do granicy y_0 .

Dowód. Z założenia $x_n \leq y_n \leq z_n$ dla każdego $n \geq n_0$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciągi (x_n) i (z_n) są zbieżne do y_0 , więc z punktu (b) Definicji 2.1 istnieją takie liczby $\bar{n}_0, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, że $x_n \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ dla każdego $n \geq \bar{n}_0$ oraz $z_n \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ dla każdego $n \geq \tilde{n}_0$. Wobec tego $y_0 - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < y_0 + \varepsilon$ dla $n \geq \hat{n}_0 := \max\{\bar{n}_0, \tilde{n}_0, n_0\}$. Stąd $y_n \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ dla każdego $n \geq \hat{n}_0$, co na mocy punktu (b) Definicji 2.1 oznacza, że (y_n) zbiega do y_0 . $\square$

Przykład 2.9. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$.

Istotnie, gdy $q = 0$ to nie ma czego dowodzić. Niech $q \neq 0$ oraz $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1$. Ponieważ $|q| < 1$, więc $\alpha > 0$. Ponadto $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$. Zatem z nierówności Bernoulliego, dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Stąd, dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |q^n| = |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\alpha}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + n\alpha} \stackrel{=:n}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \alpha} = \frac{0}{0 + \alpha} = 0.$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Przykład 2.10. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$.

Istotnie, gdy $a = 1$ to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $a > 1$. Niech $x_n := \sqrt[n]{a} - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $a > 1$, więc $x_n > 0$. Ponadto $a = (1 + x_n)^n$. Zatem z nierówności Bernoulliego

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$0 \leq x_n \leq \frac{a - 1}{n} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + 0 = 1$. Teraz załóżmy, że $0 < a < 1$. Ponieważ $\frac{1}{a} > 1$, więc z poprzedniego przypadku otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Łącząc powyższe przypadki otrzymujemy tezę.

Przykład 2.11. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Istotnie, niech $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $x_n \geq 0$ oraz $n = (1 + x_n)^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem ze wzoru dwumianowego Newtona, dla każdego $n \geq 2$, otrzymujemy

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \dots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2.$$

Tak więc, dla każdego $n \geq 2$,

$$n - 1 \geq \frac{n(n - 1)}{2}x_n^2.$$

Stąd, dla każdego $n \geq 2$,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + 0 = 1$.

Przykład 2.12. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1} = \frac{4}{3}$.

Istotnie, zauważmy najpierw, że $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\frac{0 + 4n}{3n - 1} \leq \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1} \leq \frac{1 + 4n}{3n - 1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{3n - 1} = \frac{4}{3} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4n}{3n - 1} = \frac{4}{3}.$$

Więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę.

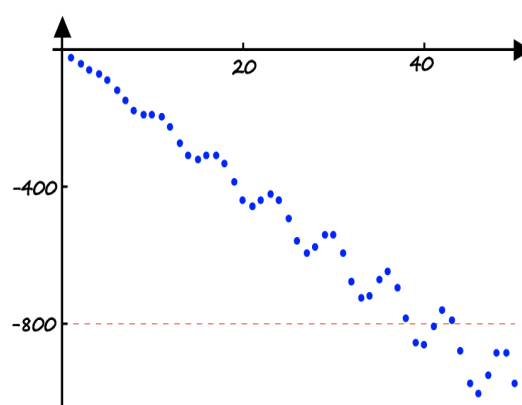
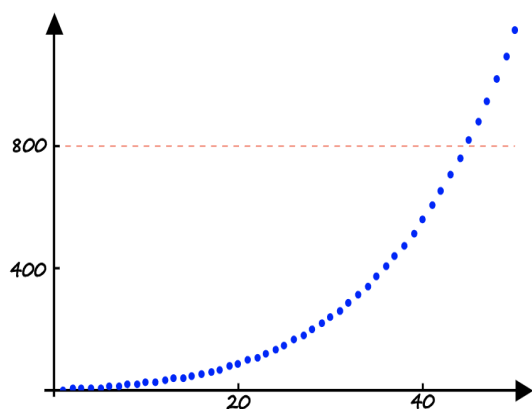
Zadanie 2.13. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n}$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n + \sin n}$,
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$, (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + n \cdot 2^n}$, (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$,
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$, (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - n \cdot 3^n}{5^n + 4^n}$, (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n - n \cdot 2^n}$.

3 Granice niewłaściwe ciągu

Definicja 3.1 (granice niewłaściwe ciągu).

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : M < x_n$,
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall M < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n < M$.



Uwaga 3.2. Definicję granicy niewłaściwej ciągu możemy też wyrazić mniej formalnie:

- (a) Ciąg (x_n) jest zbieżny do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla coraz większych n wyrazy ciągu x_n będą się zwiększać nieograniczenie;
 (b) Ciąg (x_n) jest zbieżny do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla coraz większych n wyrazy ciągu x_n będą się zmniejszać nieograniczenie.

Przykład 3.3. Rozważmy ciąg (x_n) dany wzorem $x_n = n$. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$. Dla dowodu musimy pokazać, że spełniony jest warunek z punktu (b) Definicji 3.1. Weźmy więc dowolną liczbę $M > 0$. Poszukiwać będziemy takiej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$, że $M < x_n$ dla $n \geq n_0$. Niech na przykład $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$. Wówczas, dla $n \geq n_0$, mamy

$$n \geq n_0 = \lfloor M \rfloor + 1 > M.$$

Wobec tego $M < x_n = n$ dla każdego $n \geq n_0$.

Przykład 3.4. Ciąg (x_n) dany wzorem $x_n = (-1)^n n$ nie jest zbieżny do granicy niewłaściwej. Dla dowodu pokażemy, że ciąg (x_n) nie zbiega do $+\infty$. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Wówczas na mocy warunku (b) z Definicji 3.1 musiałoby istnieć $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $1 = M < x_n$ dla każdego $n \geq n_0$. Ponieważ $x_n = (-1)^n n = -n$ dla n -nieparzystych, więc dla liczby nieparzystej m_0 większą od n_0 mielibyśmy

$$1 = M < x_{m_0} = -m_0 < -n_0.$$

Stąd $n_0 < -1$, co jest nie możliwe, gdyż n_0 jest liczbą naturalną. Analogicznie można udowodnić, że ciąg (x_n) nie zbiega również do $-\infty$.

Twierdzenie 3.5. Jeżeli (x_n) i (y_n) są ciągami liczbowymi, to

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \mp\infty$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in (-\infty, +\infty] \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in [-\infty, +\infty) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in (0, +\infty] \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$;
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in [-\infty, 0) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = -\infty$;
- (f) $x_n \in (0, +\infty) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$;
- (g) $x_n \in (-\infty, 0) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$;
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \vee \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Przykłady 3.6. Obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem Twierdzenia 3.5:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 4n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(3 - \frac{4}{n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n\right)^2 \left(3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n}\right) = (+\infty)^2(3 - 0) = +\infty;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 5n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{2}{n} - 5\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n\right)^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - 5\right) = (+\infty)^2(0 - 5) = -\infty.$$

Twierdzenie 3.7 (o dwóch ciągach). *Założmy, że dane są dwa ciągi liczbowe (x_n) i (y_n) takie, że $x_n \leq y_n$ dla każdego $n \geq n_0$. Wówczas zachodzą następujące implikacje:*

(a) *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.*

(b) *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.*

Przykład 3.8. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ dla $q > 1$.

Niech $\alpha := q - 1$. Ponieważ $q > 1$, więc $\alpha > 0$. Ponadto $q = 1 + \alpha$. Zatem z nierówności Bernoulliego, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy

$$q^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n\alpha) = +\infty.$$

Stosując twierdzenie o dwóch ciągach do ciągów $x_n = q^n$ oraz $y_n = 1 + n\alpha$ otrzymujemy tezę.

Przykład 3.9. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Zauważmy, że na mocy zasady indukcji matematycznej zachodzi nierówność

$$n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{3} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} = +\infty.$$

Stosując twierdzenie o dwóch ciągach do $x_n = \sqrt[n]{n!}$ oraz $y_n = \frac{n}{3}$ otrzymujemy tezę.

Przykład 3.10. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n n - n^2) = -\infty$.

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(-1)^n n - n^2 \leq n - n^2 = n(1 - n) \leq 1 - n.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} n = 1 - \infty = -\infty.$$

Stosując twierdzenie o dwóch ciągach do $x_n = (-1)^n n - n^2$ oraz $y_n = 1 - n$ otrzymujemy tezę.

Zadanie 3.11. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach wyznaczyć:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - 10n^6 + 1), \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n - 2)n^2, \quad (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{n - \sin n},$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n + (-1)^n), \quad (e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n]^n, \quad (f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 5^n}{5^n + 3^n}.$$

Uwaga 3.12. Następujące symbole

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad \infty - \infty \quad -\infty + \infty \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

określamy mianem wyrażeń nieoznaczonych. Występują one w procesie obliczania granic i utrudniają określenie wyniku granicy. W takiej sytuacji konieczne jest przekształcenie wyrażenia nieoznaczonego na wyrażenie oznaczone za pomocą technik algebraicznych.

4 Kryteria zbieżności ciągów

Twierdzenie 4.1. Załóżmy, że (x_n) jest ciągiem liczbowym o wyrazach nieujemnych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = q \in [0, +\infty]$. Wówczas prawdziwe są następujące zdania:

- Jeżeli $q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- Jeżeli $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Przykład 4.2. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty$.

Ponieważ ma miejsce nierówność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \left(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) = 2 + 0 = 2 > 1,$$

więc na mocy Twierdzenia 4.1 otrzymujemy tezę.

Przykład 4.3. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Ponieważ ma miejsce nierówność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

więc na mocy Twierdzenia 4.1 otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 4.4. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q \in [0, +\infty]$. Wówczas prawdziwe są następujące zdania:

- $q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = q$.

Przykład 4.5. Pokażemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Niech $x_n = \frac{3^n}{n!}$. Wówczas $x_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Ponieważ ma miejsce nierówność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n}{3^n} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

więc na mocy Twierdzenia 4.4 otrzymujemy tezę.

Zadanie 4.6. Stosując Twierdzenia 4.1 oraz 4.4 obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{5^n}, & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n!}}, & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}, \\ \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n + 3^n}, & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n. \end{array}$$

Twierdzenie 4.7 (o ciągu monotonicznym i ograniczonym).

- (a) Jeżeli ciąg (x_n) jest niemalejący dla $n \geq n_0$ oraz ograniczony z góry, to jest zbieżny do granicy właściwej równej $\sup\{x_n : n \geq n_0\}$.
- (b) Jeżeli ciąg (x_n) jest nierosnący dla $n \geq n_0$ oraz ograniczony z dołu, to jest zbieżny do granicy właściwej równej $\inf\{x_n : n \geq n_0\}$.

Przykład 4.8. Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy przez $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$.

Pokażemy, że ciąg (e_n) jest rosnący. Z nierówności Bernoulliego mamy

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = 1.$$

Zauważmy, że dla $n \geq 2$ oraz $n \geq k \geq 1$ zachodzi następująca równość

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! k! n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Pokażemy teraz ograniczoność ciągu (e_n) z góry. Będziemy korzystać ze wzoru dwumianowego Newtona, powyższej równości oraz nierówności $n! \geq 2^{n-1}$ prawdziwej dla każdego $n \geq 2$, którą można udowodnić przy pomocy indukcji matematycznej. Zatem, dla $n \geq 2$, mamy

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

To oznacza, że ciąg (e_n) jest ograniczony z góry przez 3. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg (e_n) jest zbieżny do liczby, którą oznaczamy e . Korzystając ze wzoru Taylora później pokażemy, że $e \approx 2,718$.

Przykład 4.9. Ciąg $\hat{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący i ograniczony z dołu, a zatem jest zbieżny. Granica tego ciągu jest równa e . Ponadto zachodzą następujące nierówności:

$$(*) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Pokażemy, że ciąg $(\hat{e}_n)$ jest malejący. Z nierówności Bernoulliego mamy

$$\frac{\hat{e}_n}{\hat{e}_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} > 1.$$

Zauważmy, że ciąg $(\hat{e}_n)$ jest ograniczony z dołu przez 0. Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg $(\hat{e}_n)$ jest zbieżny. Dodatkowo mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Zatem ciąg $(\hat{e}_n)$ zbiega do e od prawej strony, zaś ciąg (e_n) zbiega do e od lewej strony. Tak więc $e_n < e < \hat{e}_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 4.10 (granice ciągów z liczbą e).

(a) Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

(b) Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ oraz $y_n \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$.

Zadanie 4.11. Obliczyć podane granice:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, & \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n}, & \text{(c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n+6}\right)^n, \\ \text{(d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), & \text{(e)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}, & \text{(f)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right)^{n^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 4.12. Symbolem $[\cdot]$ oznaczamy część całkowitą liczby rzeczywistej. Wykazać, że

$$\left\lfloor \frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1} \right\rfloor = n - 1 \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wskazówka. Wykorzystać nierówności: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, które na mocy $(*)$ zachodzą dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Zadanie 4.13. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$.

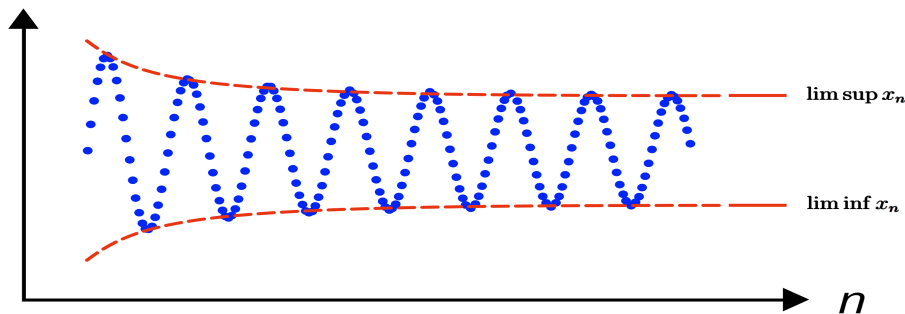
Uwaga 4.14. Każdy ciąg zbieżny do granicy właściwej jest ograniczony, natomiast ciągi zbieżne do granic niewłaściwych są nieograniczone. Granica ciągu może być tylko jedna.

5 Granice górne i dolne ciągów

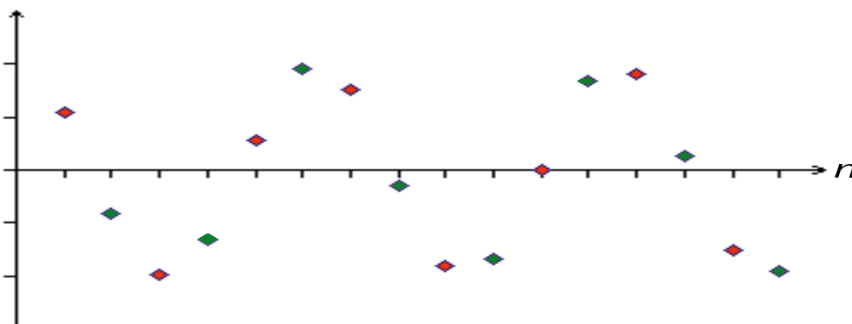
Definicja 5.1. Granice dolną i górną ciągu liczbowego $\{x_n\}$ określamy jak następuje

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup\{\inf\{x_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf\{\sup\{x_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$



Definicja 5.2. Niech $\{x_n\}$ oraz $\{y_k\}$ będą ciągami liczbowymi. Powiadamy, że $\{y_k\}$ jest podciągiem ciągu $\{x_n\}$, jeżeli istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$ taki, że $y_k = x_{n_k}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.



Definicja 5.3. Punkt $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy punktem skupienia ciągu liczbowego $\{x_n\}$, jeżeli istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Zbiór złożony z wszystkich punktów skupienia ciągu $\{x_n\}$ oznaczamy symbolem $\mathbb{S}(x_n)$. Oczywiście $\mathbb{S}(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$.



Twierdzenie 5.4. Granica dolna (górną) ciągu liczbowego $\{x_n\}$ jest najmniejszym (największym) punktem skupienia tego ciągu, tzn.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \mathbb{S}(x_n) \quad \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max \mathbb{S}(x_n) \right).$$

Przykład 5.5. Rozważmy ciąg (x_n) dany wzorem $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$. Wówczas $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ oraz $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Istotnie, zauważmy, że ciąg (x_n) przyjmuje tylko trzy wartości: $-1, 0, 1$. Ponadto wartości te są punktami skupienia ciągu (x_n) , gdyż $x_{4k-1} = \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$, $x_{2k} = \sin(k\pi) = 0$, $x_{4k+1} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$. Stąd $S(x_n) = \{-1, 0, 1\}$. Z Twierdzenia 5.4 mamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min\{-1, 0, 1\} = -1$ oraz $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max\{-1, 0, 1\} = 1$.

Uwaga 5.6. Zawsze mamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ponadto, jeżeli granice dolna i górna ciągu $\{x_n\}$ są równe $x_0 \in \mathbb{R}$, to istnieje granica ciągu $\{x_n\}$ i jest równa x_0 .

Własności 5.7. Rozważmy dwa ciągi liczbowe $\{x_n\}$ oraz $\{y_n\}$. Wówczas mamy

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$ o ile prawa strona nie jest typu $\pm\infty \mp \infty$.
Jeżeli jeden z ciągów jest zbieżny, to zachodzi równość.
- (c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ o ile prawa strona nie jest typu $\pm\infty \mp \infty$.
Jeżeli jeden z ciągów jest zbieżny, to zachodzi równość.
- (d) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n)(\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n)$ o ile oba ciągi mają wszystkie wyrazy nieujemne oraz prawa strona nie jest typu $0 \cdot \infty$. Jeżeli jeden z ciągów jest zbieżny i ma wszystkie wyrazy nieujemne, to zachodzi równość.
- (e) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq (\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n)(\liminf_{n \rightarrow \infty} y_n)$ o ile oba ciągi mają wszystkie wyrazy nieujemne oraz prawa strona nie jest typu $0 \cdot \infty$. Jeżeli jeden z ciągów jest zbieżny i ma wszystkie wyrazy nieujemne, to zachodzi równość.
- (f) Jeżeli $x_n \leq y_n$ dla $n \geq n_0$, to $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- (g) Jeżeli $x_n \leq y_n$ dla $n \geq n_0$, to $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Twierdzenie 5.8 (Bolzano-Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny do granicy właściwej. Ponadto każdy ciąg nieograniczony posiada podciąg zbieżny do granicy niewłaściwej. W szczególności zbiór punktów skupienia ciągu jest niepusty.*

Zadanie 5.9. Wyznacz granice dolną i górną następujących ciągów:

$$\begin{aligned}
 a_n &= (-1)^n ((-1)^n + 1), & b_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n, & c_n &= (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right), \\
 d_n &= \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), & e_n &= (-1)^n n, & f_n &= n(1 + (-1)^n), \\
 g_n &= 2 - (-1)^n, & h_n &= \sin \frac{n\pi}{4}, & i_n &= (-5)^n + 1.
 \end{aligned}$$