Politechnika Morska
Zakład Matematyki

Arkadiusz Misztela

Całka Funkcji Jednej Zmiennej

Analiza Matematyczna I
Materiał Pomocniczy do Zajęć

3 marca 2025

1. Całka nieoznaczona

Funkcję różniczkowalną $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, jeżeli spełnia ona warunek $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Można udowodnić, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną.

Definicja 1.1 (całka nieoznaczona)**.** Całką nieoznaczoną funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f, który oznaczamy jak następuje

$$\int f(x)\,dx.$$

Funkcja pierwotna nie jest określona jednoznacznie. Jeżeli F jest funkcją pierwotną f, to funkcja $F + c$ też jest funkcją pierwotną f dla każdego $c \in \mathbb{R}$. Odwrotnie, jeżeli F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi f, to różnią się o stałą, tzn. $F_1 - F_2 = \texttt{const}$. Zatem mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli F jest funkcją pierwotną f, to zachodzi równość*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gdzie symbol $F(x) + C$ oznacza rodzinę złożoną z funkcji $F + c$ takich, że $c \in \mathbb{R}$.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych:

(a) $\displaystyle\int 1\,dx = x + C,$ **(b)** $\displaystyle\int a\,dx = ax + C,$

(c) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$

(e) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ **(f)** $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C,$

(g) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$ **(h)** $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C,$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C,$ **(j)** $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C,$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$ **(l)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C,$ **(n)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sin} x + C.$

Twierdzenie 1.3 (o liniowości całki)**.** *Jeśli funkcje $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ posiadają funkcje pierwotne, to dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}$ funkcja $pf + qg$ posiada funkcję pierwotną oraz*

$$\int (pf(x) + qg(x))\,dx = p\int f(x)\,dx + q\int g(x)\,dx.$$

Przykłady 1.4. Zastosowanie twierdzenia o liniowości całki:

(a) Obliczymy następującą całkę

$$\begin{aligned}\int (2x - 3e^x + 4\sin x)\,dx &= 2\int x\,dx - 3\int e^x\,dx + 4\int \sin x\,dx \\ &= x^2 - 3\,e^x - 4\cos x + C.\end{aligned}$$

(b) Obliczymy następującą całkę

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + C.\end{aligned}$$

Zadanie 1.5. Obliczyć całki korzystając z ich liniowości:

(a) $\displaystyle\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\,dx,$ **(b)** $\displaystyle\int 3^x 5^{-2x}\,dx,$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx.$

Twierdzenie 1.6 (o całkowaniu przez części)**.** *Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi takimi, że $f'g$ posiada funkcję pierwotną. Wówczas fg' posiada funkcję pierwotną oraz zachodzi następująca równość*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Przykłady 1.7. Zastosowanie twierdzenia o całkowaniu przez części:

(a) Obliczymy całkę $\int x\cos x\,dx$:

Niech $f(x) = x$ oraz $g'(x) = \cos x$. Wówczas $f'(x) = 1$ oraz $g(x) = \sin x$. Zatem ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= x\sin x - \int 1\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

(b) Obliczymy całkę $\int \sin^2 x\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \left|\begin{array}{ll} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = \sin x & g = -\cos x \end{array}\right| = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x) + \int (1 - \sin^2 x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(2x) + x - \int \sin^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Przenosząc ostatnią całkę na lewą stronę i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\int \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Uwaga 1.8. Nie można traktować całki nieoznaczonej jako liczby. Istotnie, zastosujmy metodę całkowania przez części do obliczenia całki:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} f(x)=\frac{1}{\cos x} & f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ g'(x)=\sin x & g(x)=-\cos x \end{array}\right| = -1+\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$$

Jeżeli potraktujemy całkę nieoznaczoną jako liczbę, to z powyższej równości otrzymujemy $0=-1$. Ostatnia sprzeczność jest konsekwencją potraktowani całki nieoznaczonej jako liczby. Z Twierdzenia 1.2 wiemy, że całka nieoznaczona jest zbiorem funkcji pierwotnych różniących się o stałą. Wówczas $\int f(x)\,dx - \int f(x)\,dx = C$ oraz $C=-1+C$.

Zadanie 1.9. Całkując przez części obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int x\ln x\,dx$, (b) $\int e^x\cos x\,dx$, (c) $\int \ln x\,dx$,

(d) $\int x^3e^x\,dx$, (e) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$, (f) $\int \sin^3 x\,dx$.

Twierdzenie 1.10 (o całkowaniu przez podstawianie)**.** *Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną F oraz $\varphi:(c,d)\to(a,b)$ jest różniczkowalna, to $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ ma funkcję pierwotną równą $F\circ\varphi$ oraz zachodzi następująca równość*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C.$$

Przykłady 1.11. Zastosowanie twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie:

(a) Obliczymy całkę $\int 2x\cos x^2\,dx$.

Niech $f(y)=\cos y$ oraz $\varphi(x)=x^2$. Wówczas $F(y)=\sin y$ oraz $\varphi'(x)=2x$. Na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int 2x\cos x^2\,dx &= \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C\\ &= F(x^2)+C = \sin x^2+C.\end{aligned}$$

W praktyce obliczenia wykonujemy stosując następujące podstawienie

$$\int 2x\cos x^2\,dx = \left|\begin{array}{c} y=x^2 \\ dy=2x\,dx \end{array}\right| = \int \cos y\,dy = \sin y + C = \sin x^2 + C.$$

(b) Obliczymy następującą całkę

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,dx &= \left|\begin{array}{c} y=\operatorname{tg} x \\ \operatorname{arc\,tg} y = x \\ \frac{dy}{y^2+1}=dx \end{array}\right| = \int \frac{y\,dy}{y^2+1} = \left|\begin{array}{c} t=y^2+1 \\ dt=2ydy \end{array}\right| \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|y^2+1|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}^2 x+1|+C = -\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

Zadanie 1.12. Całkując przez podstawienie obliczyć całki nieoznaczone:

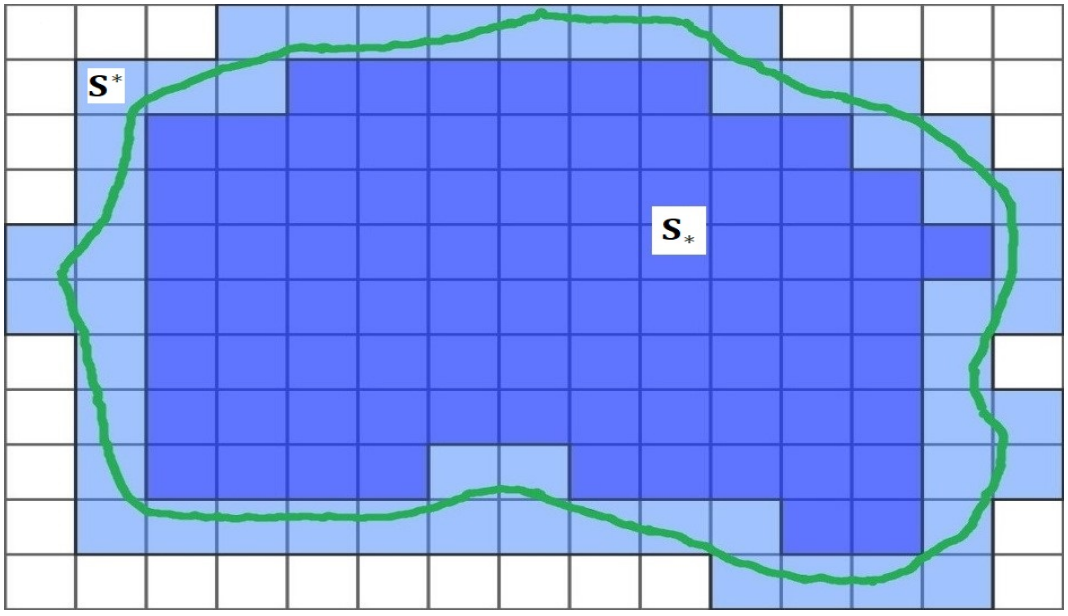
(a) $\int x(3x^2+2)^4\,dx$, (b) $\int x\sqrt{x+9}\,dx$, (c) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}\,dx$.

2. Całka Riemanna

Miara Jordana: Niech K będzie kwadratem takim, że $A \subset K$. Podzielmy kwadrat K na skończoną liczbę prostokątów domkniętych. Następnie przez S^* oznaczmy sumę pól tych prostokątów (pole prostokąta to iloczyn długości podstawy i wysokości), które mają niepustą część wspólną ze zbiorem A. Natomiast przez S_* oznaczmy sumę pól tych prostokątów, które zawierają się w zbiorze A. Jeżeli tego rodzaju prostokątów nie ma, to przyjmujemy $S_* = 0$. Niech $J^*(A)$ będzie kresem dolnym zbioru sum S^* odpowiadających wszystkim możliwym podziałom K na skończoną liczbę prostokątów, zaś przez $J_\star(A)$ oznaczmy kres górny zbioru sum S_*. Wówczas otrzymujemy, że $J_*(A) \leqslant J^*(A)$. Jeżeli

$$J_*(A) = J^*(A),$$

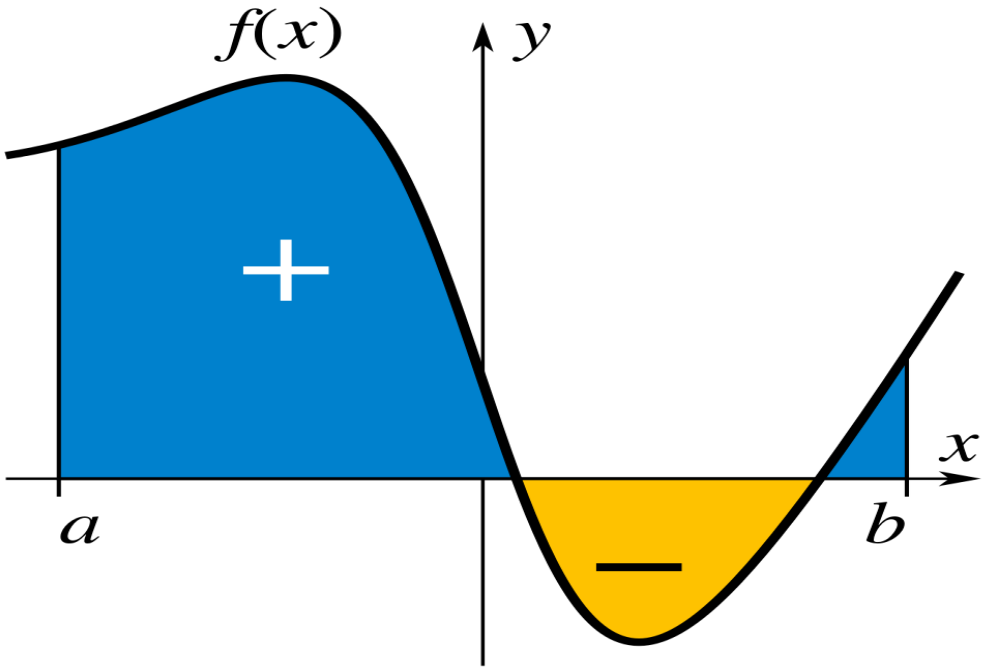
to zbiór A nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana*, a wartość $|A| = J_*(A) = J^*(A)$ nazywamy *miarą Jordana* zbioru A lub *polem* zbioru A.



Ilustracja sumy pól prostokątów S_* oraz S^*.

Uwaga 2.1. Nie każdy zbiór ograniczony na płaszczyźnie jest mierzalny w sensie Jordana. Istotnie, weźmy kwadrat K o boku długości 1cm i zdefiniujmy zbiór $C = K \cap \mathbb{Q}^2$. Na mocy gęstości zbioru liczb wymiernych i niewymiernych nietrudno zauważyć, że zbiór C nie jest mierzalny w sensie Jordana, gdyż $J_*(C) = 0 \neq 1 = J^*(C)$. Ważną własnością miary Jordana jest jej addytywność, tzn. $|A \cup B| = |A| + |B|$, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Całka Riemanna jest zorientowanym polem pod/nad wykresem rzeczywistej funkcji f określonej i ograniczonej na przedziale $[a, b]$. Dokładniej całka Riemanna $\int_a^b f(x)\,dx$ jest liczbą równą polom powierzchni obszarów zaznaczonych na niebiesko pomniejszonym o pole obszaru oznaczonego kolorem żółtym na poniższej ilustracji.



Uwaga 2.2. Nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna podobnie jak nie każdy zbiór ograniczony na płaszczyźnie jest mierzalny w sensie Jordana. Przez $\mathcal{R}[a, b]$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Riemanna. Można pokazać, że każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ należy do zbioru $\mathcal{R}[a, b]$.

Twierdzenie 2.3 (Własności Całki Riemanna)**.**

(a) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *to* $\alpha f \pm \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ *oraz*

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *oraz* $f(x) \leqslant g(x)$ *dla każdego* $x \in [a, b]$, *to*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

(c) *Jeżeli* $c \in (a, b)$, *to* $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b])$ *oraz*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 2.4 (Newtona-Leibniza)**.** *Niech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i niech $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną dla f, tzn. $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Uwaga 2.5. Twierdzenie Newtona-Leibniza ma podstawowe znaczenie w rachunku całkowym, gdyż za jego pomocą możemy efektywnie obliczać całki, o ile tylko znana jest funkcja pierwotna funkcji podcałkowej.

Przykłady 2.6. Zastosowanie twierdzenia Newtona-Leibniza do obliczania całek:

(a) Obliczymy całkę $\int_1^2 (3x^2 - 4x)\,dx$:

$$\int_1^2 (3x^2 - 4x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx - \int_1^2 4x\,dx = x^3\Big|_1^2 - 2x^2\Big|_1^2 = 1.$$

(b) Obliczymy całkę $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x\,dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

(c) Obliczymy całkę $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,dx$:

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = \Big[x - x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^1 + \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = 2 - \frac{2}{e}$$

Zadanie 2.7. Obliczyć całki oznaczone:

(a) $\int_0^1 (2x+1)^6\,dx$, **(b)** $\int_0^1 6^{1-x}x\,dx$, **(c)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} |\operatorname{tg} x|\,dx$.

Twierdzenie 2.8 (o zamianie zmiennych w całce Riemanna)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ (gdzie I jest przedziałem) jest ciągła, natomiast funkcja $g : [a,b] \to I$ jest różniczkowalna oraz $g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Wówczas funkcja $(f \circ g)g'$ jest całkowalna na $[a,b]$ oraz*

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Uwaga 2.9. Ze względów praktycznych wygodne jest przyjąć pewną umowę notacyjną. Jeżeli $f \in \mathcal{R}[a,b]$, to kładziemy

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykłady 2.10. Zastosowanie twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Riemanna:

(a) Obliczymy całkę $\int_0^1 2x(x^2+1)^5\,dx$.

Niech $f(y)=y^5$ oraz $g(x)=x^2+1$. Wtedy $g'(x)=2x$ oraz $2x(x^2+1)^5=f(g(x))\,g'(x)$. Ponadto $g(0)=1$ oraz $g(1)=2$. Zatem na mocy Twierdzenia 2.8 otrzymujemy

$$\int_0^1 2x(x^2+1)^5\,dx=\int_0^1 f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(0)}^{g(1)} f(y)\,dy=\int_1^2 y^5\,dy=\frac{1}{6}y^6\Big|_1^2=10.5.$$

(b) Obliczymy całkę $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ stosując odpowiednie podstawienie:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} y=1-x^2 \\ 0=1-1^2 \\ 1=1-0^2 \\ dy=-2x\,dx \end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

3. Zastosowanie całek oznaczonych

Twierdzenie 3.1. *Załóżmy, że $g,f\in\mathcal{R}[a,b]$ oraz $g(x)\leqslant f(x)$ dla dowolnego $x\in[a,b]$. Wówczas obszar między wykresami funkcji g i f, czyli*

$$\Lambda=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x\leqslant b, g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\},$$

jest mierzalny w sensie Jordana oraz jego miara wyraża się wzorem

$$|\Lambda|=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx.$$

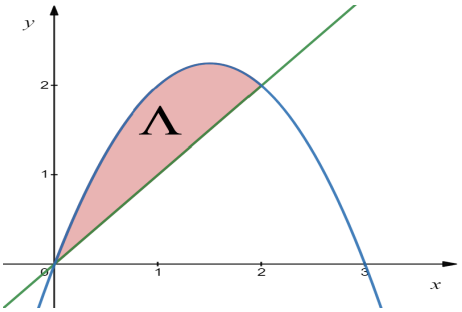
Przykłady 3.2. Zastosowanie Twierdzenia 3.1 do obliczania pól zadanych obszarów:

(a) Obliczymy pole powierzchni Λ ograniczonej krzywymi:

$y=3x-x^2$,

$y=x$,

$P(0,0)$, $P(2,2)$.

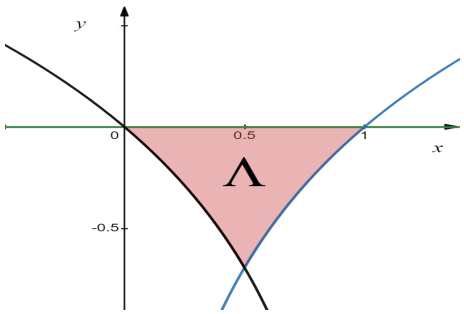


Punkty przecięcia krzywych to $P(0,0)$ oraz $P(2,2)$. Zatem otrzymujemy

$$|\Lambda|=\int_0^2\left(3x-x^2-x\right)dx=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}.$$

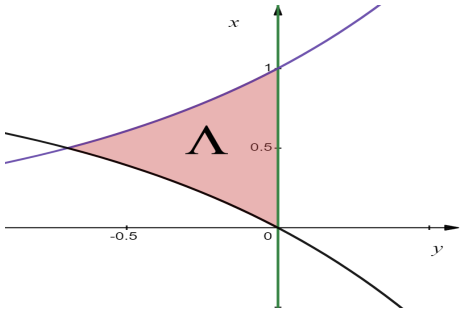
(b) Obliczymy pole powierzchni Λ ograniczonej krzywymi:

$$y = 0,$$
$$y = \ln x,$$
$$y = \ln(1-x),$$
$$P(0,0),\ P(1,0),\ P(0.5,-\ln 2).$$



Zauważmy, że powierzchnia ograniczona krzywymi:

$$x = 0,$$
$$x = e^y,$$
$$x = 1-e^y,$$
$$P(0,0),\ P(1,0),\ P(0.5,-\ln 2).$$

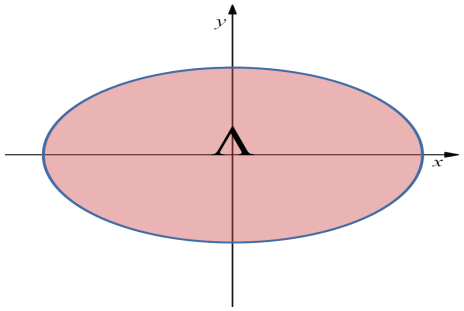


jest także równe Λ. Zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= \int_{-\ln 2}^{0} \left(e^y - (1-e^y)\right) dy = \int_{-\ln 2}^{0} \left(2e^y - 1\right) dy \\ &= \Big[2e^y - y\Big]_{-\ln 2}^{0} = 2 - (2e^{-\ln 2} + \ln 2) = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

(c) Obliczymy pole powierzchni elipsy Λ danej jak następuje

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$a > 0,\quad b > 0.$$



Powierzchnia elipsy Λ jest ograniczona z góry wykresem funkcji

$$[-a,a] \ni x \to b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

a z dołu wykresem

$$[-a,a] \ni x \to -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\,dt \end{array} \right| = \\ &= -2b\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\; a\sin t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt \\ &= 2ab\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \left[ab\left(t-\frac{\sin(2t)}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Zadanie 3.3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

(a) $y = 2x - x^2, \quad x + y = 0,$ **(b)** $y = x^2, \quad y^2 = x,$

(c) $x^2 y = 1, \quad y = 1, \quad y = 4,$ **(d)** $y = e^{-x}, \quad y = e^{3x}, \quad y = \sqrt{e}.$

Krzywą gładką Γ będziemy nazywać obraz $\gamma([a,b]) = \Gamma$ odwzorowania

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

takiego, że $x(\cdot)$ i $y(\cdot)$ są funkcjami klasy C^1 na przedziale $[a,b]$. Odwzorowanie, którego obrazem jest krzywa nazywamy parametryzacją krzywej.

Przykłady 3.4. Krzywe gładkie:

(a) Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Wówczas wykres funkcji f, czyli

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

jest krzywą gładką $\gamma([a,b]) = \mathrm{Graph}(f)$ o parametryzacji $\gamma(t) = (t, f(t))$. Istotnie, wystarczy zauważyć, że funkcje $x(t) = t$ oraz $y(t) = f(t)$ są klasy C^1 na $[a,b]$.

(b) Dowolny okrąg o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$ jest krzywą gładką o parametryzacji $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ postaci:

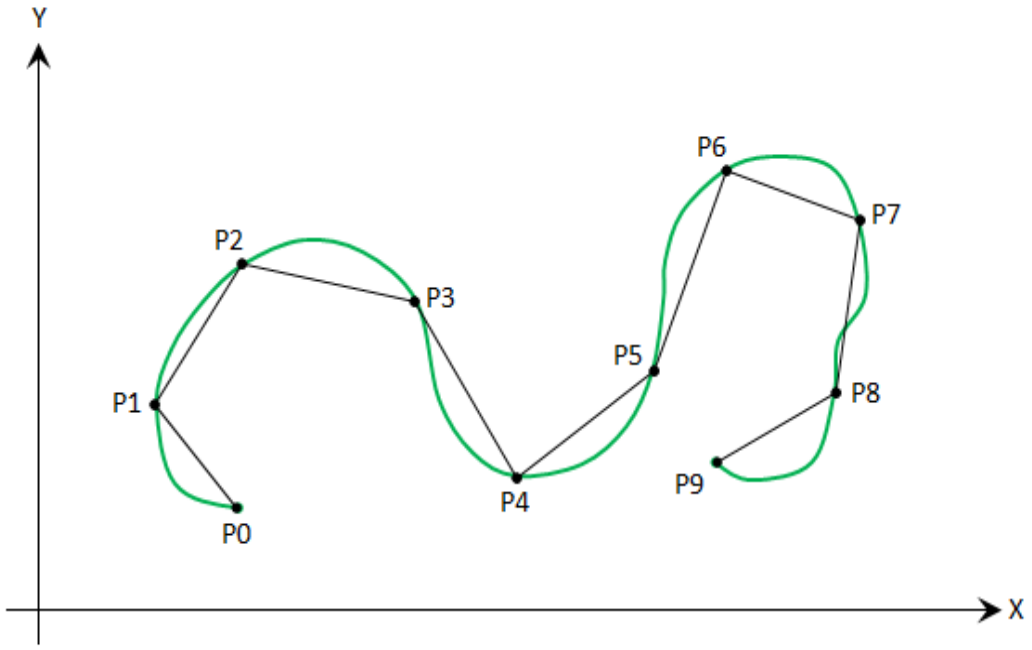
$$\gamma(t) = (x_0 + r\sin t, y_0 + r\sin t).$$

Istotnie, $x(t) = x_0 + r\cos t$ oraz $y(t) = y_0 + r\sin t$ są funkcjami klasy C^1 na $[a,b]$.

Definicja 3.5. Niech $\kappa = \{t_0, \ldots, t_n\}$ będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Wówczas punkty $P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$ leżą na krzywej $\gamma([a,b]) = \Gamma$ oraz długość łamanej łączącej kolejno punkty $P_0, P_1, \ldots, P_n$ wynosi

$$d(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|x(t_i) - x(t_{i-1})|^2 + |y(t_i) - y(t_{i-1})|^2}.$$

Jeżeli istnieje liczba d taka, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów (κ_m) mamy $\lim_{m\to\infty} d(\kappa_m) = d$, to mówimy, że krzywa Γ jest *prostowalna*, liczbę $d(\Gamma) = d$ nazywamy *długością* tej krzywej Γ.



Aproksymacja krzywej linią łamaną.

Twierdzenie 3.6. *Dowolna krzywa gładka* Γ *o parametryzacji* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, *jest prostowalna i jej długość wyraża się wzorem*

$$d(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

W szczególności, jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* C^1, *to długość jej wykresu wynosi*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Przykłady 3.7. Długości krzywych prostowalnych:

(a) Obliczymy obwód koła o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$. Parametryzacja okręgu: $x(t) = x_0 + r\cos t$ i $y(t) = y_0 + r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Zatem długość okręgu wynosi:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

(b) Obliczymy długość wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale $[-1, 1]$. Z Twierdzenia 3.6 jest ona równa całce: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$. Całkę obliczymy stosując podstawienie Eulera:

$$\sqrt{4x^2 + 1} = 2x + y, \quad \text{skąd} \quad x = \frac{1 - y^2}{4y}.$$

Zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx &= \int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{y^2+1}{4y^2}\,dy=\int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\frac{1+2y^2+y^4}{8y^3}\,dy\\ &= \left[-\frac{1}{16y^2}+\frac{1}{4}\ln y+\frac{1}{16}y^2\right]_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\\ &= \left[\frac{1}{16}\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{4}\ln y\right]_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\\ &= \sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2).\end{aligned}$$

Zadanie 3.8. Obliczyć długości łuku:

(a) wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ w przedziale $-1\leqslant x\leqslant 1$,

(b) wykresu funkcji $f(x)=\ln(1-x^2)$ w przedziale $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$,

(c) krzywej $\gamma(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$ w przedziale $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,

(d) kardioidy danej równaniem $(x^2+y^2-x)^2=x^2+y^2$.