Pochodna funkcji

Pochodną funkcji *f(x)* w punkcie x_0 nazywamy współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji *f(x)* w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Pochodną funkcji *f(x)* w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile ona istnieje):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f\left(x\right)=x^2,\ \ x_0=5$$

$$f\,'\left(5\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(5+\Delta x\right)-f\left(5\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5+\Delta x\right)^2-\left(5\right)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{25+10\Delta x+\Delta x^2-25}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(10+\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(10+\Delta x\right)=10$$

$$f\left(x\right)=x^2,\ \ x_0=7$$

$$f'\left(7\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(7+\Delta x\right)-f\left(7\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(7+\Delta x\right)^2-\left(7\right)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{49+14\Delta x+\Delta x^2-49}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{14\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(14+\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(14+\Delta x\right)=14$$

$$f\left(x\right)=x^2,\;\; x_0=x$$

$$f\,'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^2-\left(x\right)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(2x+\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x$$

Pochodne funkcji elementarnych

Funkcja	Pochodna
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Funkcja	Pochodna
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$

Reguły różniczkowania

1) $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$

2) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

3) $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$

Reguły różniczkowania

4) $\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, gdzie $g(x) \neq 0$

6) $\left[g\left(f(x) \right) \right]' = g'\left(f(x) \right) \cdot f'(x)$

Pochodna logarytmiczna

Pochodną funkcji $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$ obliczamy w następujący sposób:

1. Logarytmujemy obie strony i otrzymujemy

$$\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)},\quad \text{czyli} \quad \ln y=g(x)\ln f(x)$$

2. Różniczkujemy obie strony (traktując $\ln y$ jako funkcję złożoną)

$$\frac{1}{y}\cdot y'=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

3. Z otrzymanej równości obliczamy y' :

$$y'=\left[f(x)\right]^{g(x)}\left[g'(x)\ln(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]$$

Pochodną logarytmiczną stosujemy również wówczas, gdy funkcja jest iloczynem, ilorazem, zawiera pierwiastki, potęgi (te działania, które dają się łatwo logarytmować).