Definicja ciągu

Ciąg, jest to funkcja przyporządkowująca liczbie naturalnej n element a_n pewnego zbioru A. Elementy a_n zbioru A nazywamy **wyrazami ciągu**.

Granice ciągów

Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $m > 0$ taka, że dla wszystkich $n > m$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in N} n > m \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$$

Mówimy wtedy, że ciąg (a_n) jest **zbieżny** do liczby g.

Granice niewłaściwe ciągów

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in N} n > m \Rightarrow a_n > A$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in N} n > m \Rightarrow a_n < -A$$

Twierdzenia o granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0 \wedge b \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(c \cdot a_n\right) = c \cdot a$$

Twierdzenie o trzech ciągach

$$a_n \le b_n \le c_n \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = g$$

Np.

Znaleźć granice ciągu $b_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Wtedy ciągiem ograniczającym ten ciąg od dołu jest $a_n = \sqrt[n]{5^n}$,

a ciągiem ograniczającym od góry jest $c_n = \sqrt[n]{5^n + 5^n}$, czyli

$$\sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 5^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 1 \cdot 5 = 5$$

Stąd: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5$

Wybrane granice ciągów (przykłady)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \qquad a>0$
	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \qquad \left[\infty^0\right]$
$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & \lvert a\rvert<1\\ 1, & a=1\\ \infty, & a>1\end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \qquad \left[1^\infty\right]$
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}, \qquad \left[1^\infty\right]$

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny to ciąg liczbowy $\{a_n\}$, w którym różnica dwóch kolejnych wyrazów: $r = a_k - a_{k-1}$ (gdzie k - jest liczbą naturalną) jest stała. r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Wyraz n-ty obliczamy ze wzoru:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można obliczyć według wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny (postęp geometryczny) to ciąg liczbowy (a_n), w którym każdy następny wyraz (począwszy od drugiego) powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę $q \neq 0$, zwaną ilorazem ciągu geometrycznego.

n-ty wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie *q* jest równy:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a sumę *n* początkowych wyrazów obliczamy wg wzoru:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

przy założeniu, że $q \neq 1$ (dla $q = 1$, $S_n = a_1 \cdot n$).

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $|q| < 1$, to istnieje suma **szeregu geometrycznego**:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}$$

Granicą funkcji $f : R \rightarrow R$ w punkcie x_0 jest liczba a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego $x \in D$ spełniony jest warunek

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - a| < \varepsilon$$

Granicą funkcji $f : R \rightarrow R$ w ∞ $(-\infty)$ jest liczba a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego $x > M$ $(x < -M)$ spełniony jest warunek

$$| f(x) - a| < \varepsilon$$

Granice szczególne funkcji

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0,\ \text{dla}\quad \alpha>0$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } a > 1 \\ 0, & \text{gdy } 0 < a < 1 \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a > 1 \\ \infty, & \text{gdy } 0 < a < 1 \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Własności granic

$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$ $\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$ $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$ $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)},\qquad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ $\lim_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)$	Granicę funkcji $f(x)=\frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie *L(x)* i *M(x)* są wielomianami obliczamy, stosując powyższe własności, po uprzednim podzieleniu licznika i mianownika przez największą potęgę *x*, która występuje w mianowniku.

Ciągłość funkcji

Funkcja *f* jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli:

1)jest określona w punkcie x_0

2)ma granicę w punkcie x_0

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Własności funkcji ciągłych

Jeżeli funkcje *f(x)* i *g(x)* są ciągłe w punkcie x_0, to funkcje:

$f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ są również ciągłe w punkcie x_0,

(dla ilorazu musi być spełnione założenie, że). $g(x_0) \neq 0$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$