Zbiory w przestrzeni $\boldsymbol{R^n}$

1. **Otoczeniem** U_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ jest zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne *x*, *y* spełniają nierówność

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

(wnętrze koła o środku w P_0 i promieniu *r*, *r* >0)

2. **Sąsiedztwem** S_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ jest zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne *x*, *y* spełniają nierówność podwójną

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

(wnętrze (pierścień) koła o środku w P_0 i promienia *r*, bez punktu P_0)

3. Zbiór *Z* nazywamy **zbiorem ograniczonym**, jeżeli wszystkie jego punkty leżą w pewnym kole.

4. Punkt $P_0 \in Z$ nazywamy **punktem wewnętrznym** zbioru *Z*, jeżeli do *Z* należy otoczenie U_0 punktu $P_0 (U_0 \subset Z)$.

5. **Zbiorem otwartym** nazywamy taki zbiór *Z*, którego każdy punkt jest punktem wewnętrznym.

6. Punkt P_0 nazywamy **punktem skupienia** zbioru *Z*, jeżeli w każdym sąsiedztwie S_0 tego punktu znajduje się punkt należący do *Z*.

7. **Zbiorem domkniętym** nazywamy taki zbiór *Z*, do którego należą wszystkie jego punkty skupienia.

8. **Obszarem** nazywamy taki zbiór *Z*, że każde dwa jego punkty można połączyć łukiem (łamaną) zawartym w tym zbiorze.

9. Punkt *P* nazywamy **punktem brzegowym** zbioru *Z*, jeżeli w każdym jego otoczeniu U_0 znajduje się punkt należący i nie należący do *Z*. Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru *Z* nazywamy jego brzegiem.

Funkcja dwóch zmiennych

Niech *Z* oznacza zbiór punktów $P(x, y)$ płaszczyzny.
Funkcją dwóch zmiennych *x, y* określoną w zbiorze *Z* nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $P(x, y) \in Z$ dokładnie jednej liczby $z \in R$ (*R* – zbiór liczb rzeczywistych)

$$f: Z \to R$$

$$\left(z = f(x, y)\right)$$

x , y nazywamy **argumentami** (zmiennymi niezależnymi), *z* nazywamy **wartością funkcji** (zmienna zależna), *f* jest symbolem funkcji, zbiór *Z* nazywamy dziedziną funkcji. Jeżeli dziedzina funkcji *f* nie jest podana, wówczas przyjmujemy, że jest nią zbiór wszystkich punktów $P(x, y)$ (par liczb *x*, *y*), dla których wzór $f(x, y)$ ma sens (dziedzina naturalna).

Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych według Cauchy'ego

Zakładamy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest określona w zbiorze *D* oraz $P_0(x_0, y_0) \in D$ jest punktem skupienia zbioru *D*.

Liczbę *g* nazywamy granicą (podwójną) funkcji $f(x, y)$ w punkcie P_0, jeżeli dla dowolnej (każdej) liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego punktu $P(x, y)$ należącego do sąsiedztwa S_0 punktu P_0 o promieniu δ spełniona jest nierówność $|f(x, y) - g| < \varepsilon$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{P(x)\in D}$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - g| < \varepsilon$$

Granice iterowane (łac. iteratio – powtarzanie)

Niech $X_0 = (x_0, x_0 + h)$, gdzie x_0 jest punktem skupienia zbioru X_0 oraz $Y_0 = (y_0, y_0 + k)$, gdzie y_0 jest punktem skupienia zbioru Y_0.

a. Jeżeli dla dowolnego ustalonego $y \in Y_0$ istnieje granica właściwa funkcji $f(x, y)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = g(y)$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$, to granicę tę nazywamy **granicą iterowaną** funkcji $f(x, y)$, gdy $x \to x_0$, a następnie $y \to y_0$ i oznaczamy $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right]$.

b. Jeżeli dla dowolnego ustalonego $x \in X_0$ istnieje granica właściwa funkcji $f(x, y)$ $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = h(x)$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, to granicę tę nazywamy **granicą iterowaną** funkcji $f(x, y)$, gdy $y \to y_0$, a następnie $x \to x_0$ i oznaczamy $\lim\limits_{y \to y_0} \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right]$.

Granice iterowane funkcji $f(x, y)$ (jeżeli istnieją) nie muszą być równe.

5. **Ciągłość funkcji dwóch zmiennych**

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy ciągłą w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona w otoczeniu U_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz $P_1(x_0 + \Delta x, y_0)$, $P_2(x_0, y_0 + \Delta y) \in U_0$.

1. Jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

to nazywamy ją **pochodną cząstkową** rzędu pierwszego funkcji $f(x, y)$ **względem** *x* w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \text{ lub } \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ bądź } \quad f'_x(x_0, y_0)$$

2. Jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

to nazywamy ją **pochodną cząstkową** rzędu pierwszego funkcji $f(x, y)$ **względem zmiennej *y*** w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \;\text{ lub }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \;\text{ bądź }\; f'_y(x_0, y_0)$$

W praktyce przy obliczaniu (wyznaczaniu) pochodnych cząstkowych korzystamy ze wzorów na pochodne funkcji jednej zmiennej, zakładając, że druga zmienna jest parametrem (stałą).

$f(x,y)= x^2-3xy = x^2-3y\cdot x$

$f'_x=2x-3y\cdot 1=2x-3y$

$f'_y= 0 - 3x\cdot 1= -3x$

$z=x\cdot(x-\sin y)$

$z'_x= 1\cdot(x-\sin y)+x\cdot(1-0) = 2x - \sin y$

$z'_y= 0\cdot(x-\sin y)+x\cdot(0-\cos y)= -x\cos y$

$z=f(x,y)$

z'_x	i	z'_y
z''_{xx} i z''_{xy}		z''_{yx} i z''_{yy}

Różniczka zupełna

Dana jest funkcja $z = f(x, y)$ różniczkowalna w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ oraz punkt $P(x, y)$.

Przyrostem funkcji *f* w punkcie P_0 dla przyrostu argumentów $\Delta x, \Delta y$ nazywamy wyrażenie $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, gdzie $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Wyrażenie $d_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x$ nazywamy **różniczką cząstkową** funkcji *f* **względem *x*** w punkcie P_0 dla przyrostu argumentu Δx, analogicznie wyrażenie $d_y f = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$ nazywamy różniczką cząstkową funkcji *f* **względem *y*** w punkcie P_0.

Sumę różniczek cząstkowych funkcji *f* w punkcie P_0 nazywamy **różniczką zupełną** i oznaczamy symbolem $df(x_0, y_0)$ (lub *df*)

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

lub

$$df\left(x_0, y_0\right) = f_x^{'}\left(x_0, y_0\right)dx + f_y^{'}\left(x_0, y_0\right)dy$$

gdzie $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$ są różniczkami argumentów *x*, *y*.