Rok II	Temat 7	**SZEREGI FUNKCYJNE. SZEREG POTĘGOWY. SZEREG TAYLORA**

Ciąg funkcyjny

Niech U_o oznacza niepusty podzbiór zbioru $R(U_o \subset R)$. Ciągiem funkcyjnym $(f_n(x))$ w zbiorze U_o nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej dokładnie jednej funkcji określonej w U_o.

$f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),..., x \in U_o$. Funkcję $f_n(x)$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu $(f_n(x))$.

Definicja granicy ciągu funkcyjnego

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{U_o}{=} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{x\in U_o} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Definicja jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do funkcji $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \underset{J}{\overset{U_o}{=}} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x\in U_o} \bigwedge_{n>\delta} (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

(Symbol *J* pod znakiem równości oznacza zbieżność jednostajną).

Szereg funkcyjny

Dany jest ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ dla $x \in U_o$.

Ciąg $(S_n(x))$ o wyrazach $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ nazywamy szeregiem funkcyjnym i oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ lub $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy zbieżnym w U_o jeżeli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny w U_o.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n(x) \overset{U_o}{=} S(x)$, to funkcję $S(x)$ nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny w U_o to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym w tym zbiorze.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n(x) \underset{J}{\overset{U_o}{=}} S(x)$ to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy jednostajnie zbieżnym w U_o.

Twierdzenie (Kryterium jednostajnej zbieżności Weierstrassa)

Jeżeli istnieje $m \in N$ taka, że dla każdego $n \geq m$, $n \in N$ i dla każdego $x \in U_0$ spełniona jest nierówność $\left|f_n(x)\right| \leq a_n$ oraz szereg liczbowy (majoranta szeregu funkcyjnego) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, wówczas szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w zbiorze U_0.

Można wykazać, że jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze U_0 do funkcji $f(x)$ i jego składniki $f_n(x)$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_0 \in U_0$, to suma szeregu $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.

Szereg potęgowy

Szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazywamy szeregiem potęgowym o środku x_0. Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem współczynników. Dla $x_0 = 0$ szereg potęgowy jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Liczbę $r \in R_+ \cup \{0\}$ taką, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $|x| < r$, a rozbieżny dla $|x| > r$, nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie (wzór na promień zbieżności)

Jeżeli istnieje $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$ lub $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = g$, to promień zbieżności r szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wyznaczamy ze wzoru

$$r = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad g = +\infty, \\ \frac{1}{g}, & \text{gdy} \quad 0 < g < +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy} \quad g = 0. \end{cases}$$

Szereg Taylora

Zakładamy, że funkcja $f \in C^{\infty}(U_0)$, gdzie U_0 jest otoczeniem punktu x_0.

Szeregiem Taylora dla funkcji f w otoczeniu U_0 nazywamy szereg potęgowy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Szereg Taylora jest zbieżny do funkcji *f* (funkcja *f* jest sumą szeregu Taylora) dla tych wartości *x*, dla których $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, gdzie $R_n(x)$ jest resztą we wzorze Taylora. Szczególnym przypadkiem szeregu Taylora jest szereg Maclaurina (dla $x_0=0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots$$

Przykłady rozwinięcia w szeregu Maclaurina wybranych funkcji.

1. $\bigwedge\limits_{x\in R}$ $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

2. $\bigwedge\limits_{x\in R}$ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$

3. $\bigwedge\limits_{x\in R}$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$

4. $(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+\ldots$ dla $x\in(-1,1)$, $\alpha\le -1$,

$x\in(-1,1\rangle$, $-1<\alpha<0$,

$x\in\langle -1,1\rangle$, $\alpha>0$.

Przykłady

1. Obliczyć promień zbieżności szeregów potęgowych

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}x^n$.

Rozwiązanie

a) $g=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3}$, więc $r=\frac{1}{g}=3$.

b) $g=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^3=\frac{1}{8}$, więc $r=\frac{1}{g}=8$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\ln n}x^n$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy promień zbieżności szeregu.

$$g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\ln n}{\ln(n+1)2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln(n+1)}=2\text{, ponieważ }\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=1$$

gdyż $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

Promień zbieżności $r=\frac{1}{g}=\frac{1}{2}$, zatem szereg jest zbieżny w przedziale otwartym $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ oraz jest rozbieżny w zbiorze $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Zbadamy zbieżność szeregu dla $x=-\frac{1}{2}$ oraz $x=\frac{1}{2}$. Dla $x=-\frac{1}{2}$ otrzymujemy szereg liczbowy naprzemienny.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ jest malejący oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$, więc na podstawie kryterium Leibniza otrzymany szereg naprzemienny jest zbieżny, stąd dany szereg jest zbieżny dla $x=-\frac{1}{2}$. Dla $x=\frac{1}{2}$ otrzymujemy szereg liczbowy o wyrazach dodatnich.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Ponieważ $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ dla $n\geq 2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego wnioskujemy, że $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ jest rozbieżny. Ostatecznie dany szereg potęgowy jest zbieżny w przedziale $\left\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots\quad\text{dla } -1<x<1.$$

Ponieważ $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, więc mamy

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\frac{x}{1!}-\frac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{4!}+\dots\ .$$ Szereg jest zbieżny dla $-1<x<1$.

Zadania

1. Obliczyć promień zbieżności szeregu: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+3}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^n}x^n$;

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}x^n$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje: a) $f(x)=2^x$; b) $f(x)=\sqrt{1+x}$

Odpowiedzi

1. a) 1; b) $+\infty$; 2. a) $(-1,1>$; b) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle$.

3. a) $2^x=1+\frac{\ln 2}{1!}\cdot x+\frac{\ln^2 2}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{\ln^{n-1}2}{(n-1)!}x^{n-1}+\dots,\qquad x\in R.$

b) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1!}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\cdot\frac{x^4}{4!}+\dots$

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	V § 5, 6
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	VII § 7.2.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	XXIII