Rok II	Temat 6	**SZEREGI LICZBOWE**

1. Szereg liczbowy
2. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych
3. Szereg naprzemienny
4. Szereg o wyrazach dowolnych

Szereg liczbowy

Dany jest ciąg (a_n), $a_n \in R$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad n \in N$.

Ciąg (S_n) nazywamy szeregiem liczbowym i oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Jeżeli $\lim S_n = \lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S, \qquad S \in R$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym, a liczbę S nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny, to nazywamy go szeregiem rozbieżnym.

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych

1. **Kryterium d`Alemberta**

Jeżeli $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ jest zbieżny, gdy $q < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $q > 1$, jeżeli $q = 1$ kryterium d`Alemberta nie rozstrzyga o zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. **Kryterium Cauchy`ego**

Jeżeli $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ jest zbieżny, gdy $q < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $q > 1$, jeżeli $q = 1$ kryterium Cauchy`ego nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kryterium porównawcze

Jeżeli $0 \le a_n \le b_n$, dla $n > n_0$, $n, n_0 \in N$, to

a) ze zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

b) z rozbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. **Kryterium całkowe**

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest malejąca i dodatnia dla $x \in \langle n_0, \infty)$ oraz $f(n) = a_n$ dla $n \ge n_0$, $n, n_0 \in N$, to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (rozbieżny) wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna (rozbieżna).

Szereg naprzemienny

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad a_n > 0$ nazywamy szeregiem naprzemiennym.

Kryterium Leibniza zbieżności szeregu naprzemiennego

Jeżeli (a_n) jest nierosnący i $\lim a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

Zbieżność bezwzględna (absolutna)

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy wówczas bezwzględnie zbieżnym, jeżeli natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to nazywamy go warunkowo zbieżnym.

Przykłady

1. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 7}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Rozwiązanie

a) Stosujemy kryterium d'Alemberta.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)3^n n!}{3^n\cdot 3\cdot n!(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1,$$

więc szereg jest zbieżny.

b) Stosujemy kryterium Cauchy'ego.

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n=0<1,$$ więc szereg jest zbieżny.

c) Stosujemy kryterium porównawcze

$$\frac{1}{n^2+4n+7}=\frac{1}{(n^2+4n+4)+3}=\frac{1}{(n+2)^2+3}<\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{n^2}$$

Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc rozpatrywany szereg jest zbieżny, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+7}<+\infty$$

d) Stosujemy kryterium całkowe.

Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej.

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$. Wyznaczamy całkę nieoznaczoną.

$$\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=\frac{-1}{\ln x}+C,$$ więc

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln A}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Całka niewłaściwa jest zbieżna, więc również dany szereg jest zbieżny.

2. Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$,

Rozwiązanie
Szereg jest szeregiem naprzemiennym, więc do badania jego zbieżności zastosujemy kryterium Leibniza.

Ciąg $\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)$ jest malejący oraz $\lim \frac{n+1}{n(n+2)} = 0$, więc szereg jest zbieżny. Szereg wartości bezwzględnych jest postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$. Ponieważ $\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ jest rozbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ jest również rozbieżny.

Ostatecznie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n(n+2)}$ jest zbieżny warunkowo.

Zadania:

1. Zbadać zbieżność szeregów o wyrazach nieujemnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

2. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Odpowiedzi

1. a) rozbieżny; b) zbieżny; c) zbieżny; d) zbieżny.
2. a) zbieżny warunkowo; b) zbieżny bezwzględnie; c) rozbieżny.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	V § 1, 2
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	VII § 7.1.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	XXII