Rok I	Temat 11	**CAŁKA NIEOZNACZONA**

1. Definicja całki nieoznaczonej
2. Podstawowe twierdzenia
3. Metody całkowania
4. Całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych

Definicja

Funkcję $F(x)$ taką, że jej pochodna równa się danej funkcji

$$f(x) \text{ dla } x \in (a,\ b) \text{ tzn. } F'(x) = f(x)$$

nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji $f(x)$. Jeżeli dwie funkcje mają w pewnym przedziale równe pochodne, to mogą różnić się co najwyżej o stałą

$$\left(\bigwedge_{x \in (a,\ b)} f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \text{ gdzie } C - \text{ dowolna stała} \right)$$

Z twierdzenia tego wynika, że jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną, to dowolna funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ jest postaci $G(x) = F(x) + C$.

Definicja

Zbiór funkcji pierwotnych danej funkcji $f(x)$ nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji $f(x)$ i oznaczamy ją symbolem $\int f(x)dx = F(x) + C$

(czytamy „całka $f(x)$ po dx"), gdzie $F(x)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$. Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a liczbę C – stałą całkowania. Wyznaczenie funkcji pierwotnej nazywamy całkowaniem. Całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania. Należy jednak podkreślić, że całkowanie jest trudniejsze od różniczkowania.

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła w pewnym przedziale jest w tym przedziale całkowalna.

Twierdzenie

a) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$; b) $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Twierdzenie

Założenie: istnieją funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ i $g(x)$.
Teza:
a) czynnik stały można wyłączyć przed znak całki $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \quad k \in R$

b) całka sumy równa się sumie całek $\int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Metody całkowania

Całkowanie przez części
Jeżeli funkcje $f, g \in C^1(X_p)$ to $\int f'(x)g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Całkowanie przez podstawianie (metoda zamiany zmiennych).

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziale (a,b) i funkcja $x = g(t) \in C^1((\alpha,\beta))$ oraz $\alpha < g(t) < \beta$ to $\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$.

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów.
Jeżeli $F_n(x), G_m(x)$ są wielomianami stopnia n i m, gdzie $n < m$ wówczas funkcję $\frac{F_n(x)}{G_m(x)}$ nazywamy funkcją wymierną właściwą, jeżeli natomiast $n \ge m$, to funkcję tę nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą.
Funkcję wymierną niewłaściwą przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{F_n(x)}{G_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{G_m(x)} \qquad (k < m)$$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na sumę ułamków prostych, tzn. funkcji wymiernych postaci:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad \frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n \in N \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Całkowanie ułamków prostych

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C$,
2. $\int \frac{A_n dx}{(x-a)^n} = \frac{A_n}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \qquad n > 1$

Całkowanie funkcji niewymiernych

1. Niech $R(u, v)$ oznacza funkcję wymierną zmiennych u, v.

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad , \quad ad - bc \neq 0.$

Podstawienie (sprowadzamy całkę do całki funkcji wymiernej) $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Podstawienia Eulera (na ogół nieefektywne, prowadzące do skomplikowanych całek funkcji wymiernych)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \sqrt{a}\ x \pm t, & a>0 \\ xt+\sqrt{c}, & c>0 \\ t(x-x_1), & \Delta>0 \end{cases}$$

x_1 – jeden z pierwiastków trójmianu ax^2+bx+c.

Przypadki szczególne

3. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$, podstawienie $\sqrt{f(x)} = t$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Sprowadzamy trójmian ax^2+bx+c do postaci kanonicznej i otrzymujemy całki typu:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{|\alpha|}+C \qquad \text{lub} \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|+C.$$

2. **Całkowanie funkcji trygonometrycznych**

Całkę postaci $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdzie R jest funkcją wymierną zmiennych $\sin x, \cos x$ możemy zawsze sprowadzić do całki funkcji wymiernej stosując podstawienie (uniwersalne)

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Wówczas $\sin x, \cos x, dx$ są funkcjami wymiernymi zmiennej t

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Przypadki szczególne

1. Jeżeli $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$), podstawiamy: $\cos x = t$.

2. Jeżeli $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\cos x$), podstawiamy: $\sin x = t$.

3. Jeżeli $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$ i $\cos x$ jednocześnie), podstawiamy: $\operatorname{tg} x = t$.

Przykłady

1. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int 3^x \cos x dx$ **:**

Rozwiązanie

Stosujemy wzór na całkowanie przez części:

$$l = \int 3^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} f'(x) = 3^x, f(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3} \\ g(x) = \cos x, g'(x) = -\sin x \end{array} \right| = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int 3^x \sin x dx ,$$

$$I_1 = \int 3^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} f'(x) = 3^x, f(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3} \\ g(x) = \sin x, g'(x) = \cos x \end{array} \right| = \frac{3^x \sin x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x \cos x dx = \frac{3^x \sin x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot I$$

Podstawiamy całkę I_1 do całki I.

$$I = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^x \sin x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} I\right) \text{ oraz } I + \frac{1}{\ln^2 3} I = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{3^x \sin x}{\ln^2 3},$$

$$\left(1 + \frac{1}{\ln^2 3}\right) I = \frac{3^x \cos x}{\ln 3} - \frac{3^x \sin x}{\ln^2 3}, \text{ ostatecznie } I = \frac{3^x (\ln 3 \cos x - \sin x)}{1 + \ln^2 3} + C.$$

2. Wyznaczyć całkę $\int x\sqrt{x^2+1}dx$;

Rozwiązanie

Podstawiamy $\sqrt{x^2+1} = t$, stąd $x^2 + 1 = t^2$ oraz $2xdx = 2tdt$, czyli $xdx = tdt$.

Otrzymujemy $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{x^2+1}xdx = \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} + C$.

3. Wyznaczyć całkę $\int \dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)^2}dx$;

Rozwiązanie

Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}, \text{ stąd}$$

$$x + 1 \equiv (A+B)x^2 + (6A + 2B + C)x + 9A - 3B + C.$$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach x:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 : A+B=0 \\ x^1 : 6A+2B+C=1 \\ x^0 : 9A-3B-C=1 \end{array}\right\}$$

Rozwiązując układ równań mamy: $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=\frac{1}{2}$, więc

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+3}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+3)^2}\,dx=\frac{1}{8}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+3|-\frac{1}{2(x+3)^2}+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|-\frac{1}{2(x+3)}+C.$$

4. Znaleźć podane całki nieoznaczone:

a) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; b) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$;

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzoru $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$.

Sprowadzamy trójmian kwadratowy x^2+2x+3 do postaci kanonicznej:

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}=\left|\begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C$$

b) Stosujemy metodę współczynników nieoznaczonych.

$$I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx=a\sqrt{x^2+2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Po zróżniczkowaniu obu stron otrzymujemy

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$

stąd $x+2\equiv ax+a+\lambda$, więc $a=1,\lambda=1$. Zatem

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|+C.$$

Ostatecznie $I=\sqrt{x^2+2x+5}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$.

5. Znaleźć podane całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych:

a) $\int\frac{dx}{\sin x}$; b) $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$;

Rozwiązanie

a) Stosujemy podstawienie uniwersalne

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} tg\,\dfrac{x}{2} = t \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

b) Funkcja podcałkowa jest nieparzysta względem $\sin x$, więc podstawiamy $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int (1-t^2)t^2(-dt) =$$

$$= \int (t^4 - t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Zadania

1. Znaleźć podane całki nieoznaczone (całkowanie przez części):

a) $\int xe^{2x} dx$; b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

2. Znaleźć podane całki nieoznaczone (metoda zamiany zmiennych):

a) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$;

3. Znaleźć podane całki funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{dx}{x^3 - x}$; b) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

4. Znaleźć podane całki funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$;

5. Znaleźć podane całki funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$; b) $\int \sin 2x \sin 5x dx$;

Odpowiedzi

1. a) $\frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$; b) $\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$;

2. a) $-2\cos\sqrt{x} + C$; b) $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln|\ln x| + C$;

3. a) $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$; b) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$;

4. a) $-2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \ln\left|1 + 2x - 2\sqrt{x^2+x}\right| + C$; b) $2\ln|x+3| + 3\ln|x-3| + C$;

5. a) $\frac{1}{\cos x} - tgx + x + C$; b) $\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$;

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	IV § 1-7
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	V § 5.1.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	VIII