Rok I	Temat 10	**REGUŁY DEL'HOSPITALA, ASYMPTOTY, BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI**

1. Reguły del'Hospitala
2. Asymptoty wykresu funkcji
3. Wszechstronne badanie przebiegu zmienności funkcji postaci $y = f(x)$

Reguły de L'Hospitala

1. Symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ różniczkowalne w otoczeniu U_0 punktu x_0 spełniają warunki:

1.1. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

1.2. istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g\,, \qquad g'(x) \neq 0 \text{ dla } x \neq x_0,\ x \in U_0$$

to istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = g$.

2. Symbol nieoznaczony $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ różniczkowalne w otoczeniu U_0 punktu x_0 spełniają warunki:

2.1. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \text{, dla } x \neq x_0$$

2.2. istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g\,, \qquad g'(x) \neq 0 \text{ dla } x \in U_0$$

to istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = g$.

Asymptoty krzywych

1. Asymptoty pionowe

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty(-\infty)$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty(-\infty)$, to prosta $x = x_0$ jest **asymptotą pionową** wykresu funkcji (krzywej) $y = f(x)$.

2. **Asymptoty ukośne**

Asymptotą ukośną wykresu funkcji $y = f(x)$ nazywamy prostą o równaniu $y = mx + n$ taką, że $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$ lub $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$. Wówczas $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ lub $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$ lub $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$ $m, n \in R$.

Jeżeli $m = 0$, to prostą o równaniu $y = n$ nazywamy asymptotą poziomą.

Badanie przebiegu zmienności funkcji możemy przeprowadzić według następującego schematu:
1. Określamy dziedzinę funkcji,
2. Wyznaczamy granice funkcji na krańcach przedziałów określoności,
3. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych,
4. Sprawdzamy, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa,
5. Wyznaczamy asymptoty wykresu funkcji (pionowe, ukośne),
6. Znajdujemy ekstrema funkcji oraz przedziały monotoniczności,
7. Znajdujemy punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości,

Szkicujemy wykres funkcji na podstawie informacji uzyskanych w punktach 1 – 7, które można zestawić w postaci tabelarycznej.

Przykłady

1. Obliczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Rozwiązanie

Symbol H nad znakiem równości oznacza, że stosujemy regułę de L'Hospitala. Ponadto zakładamy, że istnieje granica po prawej stronie równości.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3}{1}=\ln 3$;

b) Wystąpił symbol nieoznaczony $[\infty-\infty]$ więc musimy przedstawić funkcję w takiej postaci aby wystąpił równoważny symbol $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$. Mamy symbol nieoznaczony postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$ a więc możemy stosować reguły de L'Hospitala (dwukrotnie).

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{H}{=}\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

c) Mamy symbol nieoznaczony $[\infty^0]$.

Niech $h(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\ln h(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\ln h(x)=\sin x\ln\frac{1}{x}$ stąd $h(x)=e^{\sin x\ln\frac{1}{x}}$.

Następnie obliczamy $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln\frac{1}{x}$. Wystąpił symbol nieoznaczony $[0\cdot\infty]$ więc przekształcamy funkcję i dwukrotnie stosujemy regułę de L'Hospitala.

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Ostatecznie szukana granica danej funkcji równa się $e^0=1$.

2. Wyznaczyć równania asymptot danej krzywej: $y=x\ln\frac{x-1}{x}$;

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę funkcji;

$$\frac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow x(x-1)>0,\ x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty).$$

Sprawdzamy czy funkcja ma asymptoty pionowe w punktach 0 lub 1.

$$\lim_{x\to0^-}x\ln\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{1-x}=0$$ wynika, stąd że prosta $x=0$ nie jest asymptotą pionową.

$\lim\limits_{x\to1^+}x\ln\frac{x-1}{x}=-\infty$ więc prosta $x=1$ jest asymptotą pionową prawostronną.

Z kolei szukamy asymptot ukośnych:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-1}{x}=\ln1=0.$$ Dla $x\to-\infty$ również $m=0$.

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1}=-1$$, również dla $x\to-\infty$

$m=0$. Mamy więc asymptotę poziomą $y=-1$.

Zadania

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $a>0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

2. Wyznaczyć równania asymptot danych krzywych:

a) $f(x)=x+\frac{\ln x}{x}$; b) $f(x)=xe^{\frac{4}{x}}-1$.

3. Przeprowadzić badanie funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; b) $f(x)=\frac{x^2}{4-|x|}$.

Odpowiedzi

1. a) $\ln a$; b) e; c) α; d) 1; 2. a) $x=0,\ y=x$; b) $x=0, y=x+3$.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	III § 18-20
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	IV § 4.7., 4.8.2., 4.8.7
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	VII