Rok I	Temat 9	**MONOTONICZNOŚĆ, EKSTREMA, PUNKTY PRZEGIĘCIA**

Monotoniczność funkcji

Pojęcie monotoniczności funkcji obejmuje dwa zagadnienia: wzrastania i zmniejszania się wartości funkcji wraz ze wzrostem argumentu. Badanie monotoniczności funkcji polega na wyznaczeniu przedziałów, w których funkcja jest rosnąca lub malejąca. Zagadnienie to rozwiązujemy na podstawie następującego twierdzenia.

Jeżeli pochodna funkcji f jest w każdym punkcie przedziału (a, b) dodatnia (ujemna), to funkcja jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).

2. **Ekstrema funkcji**

Niech $x \to f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $\langle a,\ b\rangle$. Ponadto niech punkt x_0 będzie punktem wewnętrznym przedziału $\langle a,\ b\rangle$. Symbolem U_0 oznaczmy otoczenie punktu x_0, tzn. przedział otwarty

$$U_0 = (x_0 - h,\quad x_0 + h),\qquad \text{gdzie } h > 0$$

Definicja

Jeżeli istnieje otoczenie U_0 punktu x_0 całkowicie zawarte w przedziale $\langle a,\ b\rangle$ takie, że dla punktów x należących do tego otoczenia zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum**, jeżeli natomiast zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum**. Maksimum i minimum funkcji obejmujemy wspólną nazwą ekstremum funkcji. Pojęcie ekstremum odgrywa ważną rolę w naukach stosujących w swoich badaniach metody matematyczne.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 ma ekstremum w tym punkcie, to: $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe.

Twierdzenie (warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum)

Założenie:

a) $f'(x_0) = 0$
b) $f'(x) > 0$ dla $x < x_0$, $f'(x) < 0$ dla $x > x_0$

Teza:

Funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum.

Twierdzenie *(warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum)*

Założenie:
a) $f'(x_0) = 0$
b) $f'(x) > 0$ dla $x > x_0$, $f'(x) < 0$ dla $x < x_0$
Teza:
Funkcja f ma w punkcie x_0 minimum.

Twierdzenie (warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum)

Zakładamy, że funkcja $f \in C^2((a,b))$.
Funkcja f ma ekstremum w punkcie $x_0 \in (a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

a) $f'(x_0) = 0$,
b) $f''(x_0) \neq 0$.

Jeżeli $f''(x_0) < 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum, jeżeli natomiast $f''(x_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum.

Ekstremum funkcji może również występować w punkcie, w którym funkcja jest ciągła, ale nie ma pochodnej (w punkcie x_0 występuje ostrze). Badanie istnienia ostrzy przeprowadzamy bezpośrednio korzystając z definicji ekstremum.

Najmniejsza i największa wartość funkcji

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą (minimum absolutne) oraz wartość największą (maksimum absolutne).
Sposób wyznaczania najmniejszej lub największej wartości funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$

Znajdujemy punkty, w których pochodna $f'(x)$ równa się zeru lub nie istnieje, należące

1. do przedziału $\langle a, b\rangle$ i obliczamy wartości funkcji w tych punktach.

2. Obliczamy wartości $f(a)$ i $f(b)$ na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$.

Spośród wartości obliczonych w p. 1 oraz $f(a)$, $f(b)$ wybieramy wartość największą i najmniejszą.

Przedziały wypukłości i wklęsłości

Funkcję f nazywamy wypukłą (wklęsłą) w przedziale (a, b), jeżeli jej wykres „leży nad styczną” („leży pod styczną”) w tym przedziale.

Punktem przegięcia funkcji f nazywamy punkt, w którym wykres funkcji przechodzi z jednej strony stycznej na drugą.

Twierdzenie

Zakładamy, że $f(x) \in C^2(\{x_0\})$

1. Jeżeli f ma drugą pochodną dodatnią (ujemną) w punkcie x_0, to jest wypukła (wklęsła) w tym punkcie.

2. Jeżeli punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f, to $f''(x_0) = 0$ (warunek konieczny).
Punkt przegięcia może również wystąpić w punkcie, w którym druga pochodna nie istnieje.

3. Jeżeli funkcja f dwukrotnie różniczkowalna w otoczeniu U_0 punktu x_0 speł- nia warunki

a) $f''(x_0) = 0$,

b) $f''(x_0) > 0$ dla $x > x_0$

$f''(x_0) < 0$ dla $x < x_0$

lub

$f''(x_0) > 0$ dla $x < x_0$

$f''(x_0) < 0$ dla $x > x_0$

to x_0 jest punktem przegięcia (warunek konieczny i dostateczny).

4. Jeżeli funkcja f trzykrotnie różniczkowalna w otoczeniu U_0 punktu x_0 speł- nia warunki

a) $f''(x_0) = 0$,

b) $f'''(x_0) \neq 0$

oraz $f'''(x_0)$ jest ciągła w punkcie x_0, to x_0 jest punktem przegięcia (warunek konieczny i dostateczny).

Przykłady

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 e^{-x^2}$:

Rozwiązanie

Dziedzina funkcji $f(x)$: $x \in R$.

$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2} \cdot (-2x) = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$. Dziedzina pochodnej $f'(x)$: $x \in R$.

$f'(x) > 0$ gdy $3-2x^2 > 0$, stąd $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right) \cup \left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $f'(x) < 0$, gdy $x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ oraz malejąca w przedziałach $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$.

2. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 \ln x$ za pomocą pochodnej pierwszego rzędu.

Rozwiązanie
Dziedzina funkcji $f : x > 0$. Obliczamy pochodną

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1),\ x > 0 .$$

Wyznaczamy punkty, w których może wystąpić ekstremum funkcji.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3\ln x + 1 = 0, \text{ stąd } x = e^{-\frac{1}{3}}.$$

Badamy znak $f'(x)$ w sąsiedztwie punktu $x = e^{-\frac{1}{3}}$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow 3\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(e^{-\frac{1}{3}},\infty\right),\quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(0,e^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Ponieważ w sąsiedztwie punktu $x = e^{-\frac{1}{3}}$ pochodna zmienia znak z „- na +", więc w tym punkcie funkcja ma minimum.

$$x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}},\ y_{\min} = f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{e^{-1}}{3},\ P_{\min}\left(e^{-\frac{1}{3}},-\frac{e^{-1}}{3}\right).$$

3. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Rozwiązanie
Dziedzina funkcji: $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Obliczamy $f'(x)$ i $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},\ f''(x) = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

Dziedzina pochodnych jest taka jak dziedzina funkcji.
Badamy znak drugiej pochodnej:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x} > 0 \Leftrightarrow x\ln^3 x(2-\ln x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1,e^2)$ - funkcja wypukła,
$f''(x) < 0$ dla $x \in (0,1) \cup (e^2,\infty)$ - funkcja wklęsła.

4. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$.

Rozwiązanie
Obliczamy $f'(x)$ i $f''(x)$: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$, $x \in R$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0$, stąd $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Następnie badamy znak $f''(x)$ w sąsiedztwie tych punktów.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)>0 \Leftrightarrow 2x^2-1>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$.

Ponieważ w sąsiedztwie wyznaczonych punktów $f''(x)$ zmienia znak, więc funkcja *f* ma punkty przegięcia: $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Zadania

1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji. $f(x)=(x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$
3. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x)=\sin x+\cos 2x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$.

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji

a) $f(x)=2x^2+\ln x$; b) $f(x)=\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

5. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji: a) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; b) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$.

Odpowiedzi

1. $(0,\frac{1}{e}>\cup<e,\infty)$ - funkcja rosnąca, $\left(\frac{1}{e},e\right)$ - funkcja malejąca.
2. $P_{\min}(3,e)$;
3. $m=0,\ M=\frac{9}{8}$.
4. a) $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; b) wypukła dla $x>0$; 5. a) $\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$; b) $(1,e)$.

Lp.	Literatura	Rozdział
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	III § 14-17
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	IV § 4.8.3.-4.8.7.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	VI