Rok I	Temat 8	POCHODNE FUNKCJI

1. Definicja pochodnej 2. Pochodne jednostronne 3. Reguły różniczkowania 4. Pochodne wyższych rzędów

1. **Definicja pochodnej**

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0\ \left(f'(x_0)\right)$ (o ile istnieje) nazywamy granicę ilorazu różnicowego $\left(\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}\right)$, gdy przyrost argumentu $(\Delta\, x)$ dąży do zera

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta\, x) - f(x_0)}{\Delta\, x} = f'(x_0), \text{ gdzie } \Delta\, x = x - x_0 .$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy **różniczkowalną** w punkcie x_0, gdy ma w tym punkcie skończoną pochodną.

Funkcję, która ma pochodną w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego nazywamy różniczkowalną w tym przedziale. Pochodną funkcji $f(x)$ w danym przedziale U_0 $(x \in U_0)$ $f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną.

2. **Pochodne jednostronne**

Pochodną prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0\left(f'_+(x_0)\right)$ nazywamy granicę prawostronną ilorazu różnicowego $\left(\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}\right)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta\, x) - f(x_0)}{\Delta\, x} \quad , \qquad \Delta\, x \to 0^+, \text{ jeżeli } x \to x_0^+ \ \ (x > x_0)$$

Pochodną lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0\left(f'_-(x_0)\right)$ nazywamy granicę lewostronną ilorazu różnicowego $\left(\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}\right)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta\, x) - f(x_0)}{\Delta\, x} \quad , \qquad \Delta\, x \to 0^-, \text{ jeżeli } x \to x_0^- \ \ (x < x_0)$$

Pochodna $f'(x_0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie pochodne jednostronne istnieją i są równe, tzn. $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodną funkcji $y = f(x)$ interpretujemy geometrycznie jako **współczynnik kierunkowy** stycznej do wykresu funkcji w punkcie $P_0(x_0,\, y_0)$ należącym do wykresu funkcji tzn. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, α – kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji względem dodatniego zwrotu osi OX .

Równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ leżącym na tej krzywej jest postaci $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ przy założeniu, że istnieje $f'(x_0)$.

Równanie normalnej (prostej prostopadłej do stycznej w punkcie styczności) do krzywej $y = f(x)$ jest postaci $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ przy założeniu, że $f'(x_0) \neq 0$.

3. **Reguły różniczkowania**

1. $f(x) \equiv \mathrm{C}$ (C – stała), $f'(x) = 0$
2. $\left[\mathrm{C}f(x)\right]' = \mathrm{C}f'(x)$
3. $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$
4. $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, $\quad g(x) \neq 0$.

Pochodna funkcji złożonej

Jeżeli $y = f(u)$, $u \in D$, $u = g(x)$, $x \in \Delta$ wówczas pochodną funkcji złożonej $y = f\left[g(x)\right]$, f – funkcja zewnętrzna, g – funkcja wewnętrzna (wnętrze) obliczamy ze wzoru

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\left[g(x)\right] \cdot g'(x)$$

przy założeniu, że obie funkcje f i g są różniczkowalne.

Pochodna funkcji odwrotnej

Jeżeli funkcja $x = f^{-1}(y)$ jest funkcją odwrotną względem funkcji $y = f(x)$, wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}, \qquad \left[f^{-1}(y)\right]' \neq 0.$$

4. Pochodne wyższych rzędów

Pochodna rzędu n $(n \in N)$ funkcji f jest pochodną pochodnej rzędu $n-1$, tzn.

$$y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Funkcję *f*, która ma pochodną rzędu *n*, nazywamy funkcją ***n*-krotnie różniczkowalną**.

Przykłady pochodnych *n* rzędu, $n \in N$

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
2. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
3. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!x^{-n}$
4. $(x^{\alpha})^{(n)} = n!\binom{\alpha}{k}x^{\alpha-n}$

Przykłady

1. Na podstawie definicji obliczyć pochodną funkcji: $f(x) = \cos 2x$ w punkcie x_0.

Rozwiązanie.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \text{ gdzie } \Delta x = x - x_0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos 2(x_0 + \Delta x) - \cos 2x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2} \cdot \sin\frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(2x_0 + \Delta x)\sin\Delta x}{\Delta x} = -2\sin 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = -2\sin 2x_0 \cdot 1 = -2\sin 2x_0,$$

gdyż $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$.

2. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sin^3 x^3$.

Rozwiązanie

Funkcją zewnętrzną jest $f(u) = u^3$, natomiast wnętrzem funkcja $u = \sin x^3$, która również jest funkcją złożoną. Funkcją zewnętrzną jest $u = \sin v$, wnętrzem $v = x^3$. Ponieważ $(u^3)' = 3u^2, (\sin v)' = \cos v, v' = 3x^2$, więc $(\sin^3 x^3)' = 3\sin^2 x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 9x^2 \sin^2 x^3 \cdot \cos x^3$.

3. Wyznaczyć pochodną n-tego rzędu funkcji $f(x)=5^x$.

Rozwiązanie

$f'(x)=(5^x)'=5^x\ln 5$, $f''(x)=(5^x\ln 5)'=(5^x)'\ln 5=(5^x\ln 5)\ln 5=5^x\ln^2 5$,

$f'''(x)=(5^x\ln^2 5)'=(5^x)'\ln^2 5=(5^x\ln 5)\ln^2 5=5^x\ln^3 5$. $f^{(n)}(x)=5^x\ln^n 5$ (dowód indukcyjny).

Zadania

1. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodną funkcji $f(x)=2^x$.
2. Wyznaczyć pochodne funkcji:

a) $f(x)=e^{\cos x}$; b) $f(x)=\ln(\sin 2x)$; c) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$.

3. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x)=(\ln x)^x$; b) $f(x)=(\sin x)^{\sin x}$

4. Wyprowadzić wzór na *n*-tą pochodną funkcji

a) $f(x)=\ln x$; b) $f(x)=xe^x$.

Odpowiedzi:

1. $f'(x)=2^x\ln 2$; 2. a) $f'(x)=e^{\cos x}(-\sin x)$; b) $f'(x)=2ctg 2x$; c) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

3. a) $f'(x)=(\ln x)^{x-1}[1+\ln x\ln(\ln x)]$, $x>e$;

b) $f'(x)=(\sin x)^{\sin x}\cos x(1+\ln\sin x)$, $\sin x>0$.

4. a) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, $x>0$; b) $f^{(n)}(x)=e^x(x+n)$.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	III § 4-10
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	IV § 4.1.-4.5.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	V