Rok I	Temat 7	**GRANICA CIĄGU I GRANICA FUNKCJI**

1. Granica ciągu liczbowego
2. Granica funkcji

Pojęcie ciągu

Definicja

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych

$$f\colon N \longrightarrow A$$

Jeżeli $A \subset R$, to ciąg nazywamy ciągiem liczbowym. Wartości funkcji f nazywamy wyrazami ciągu. Wyraz ciągu $f(n)$ ($n \in N$) oznaczamy a_n, (a_n – ogólny wyraz ciągu). Ciąg o wyrazach $a_1, a_2, ..., a_n$ oznaczamy symbolem (a_n).

Jeżeli rozpatrujemy funkcję określoną na skończonym podzbiorze początkowych liczb naturalnych, to nazywamy ją ciągiem skończonym.

Ciągi monotoniczne

Definicja

a. Ciąg (a_n) jest rosnący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} \; a_n < a_{n+1}$

b. Ciąg (a_n) jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} \; a_n > a_{n+1}$

Jeżeli w definicji zastąpimy znak < (>) znakiem ≤ (≥), otrzymamy definicję ciągu niemalejącego (nierosnącego).

Ciągi rosnące i malejące nazywamy **ciągami monotonicznymi**. Korzystając z definicji badanie monotoniczne ciągu możemy sprowadzić do sprawdzenia znaku różnicy $a_{n+1} - a_n$, ponieważ

$$\bigwedge_{n \in N} \; a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} \; a_{n+1} - a_n > 0 \text{ – ciąg rosnący}$$

oraz

$$\bigwedge_{n \in N} \; a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} \; a_{n+1} - a_n < 0 \text{ – ciąg malejący.}$$

Granice ciągów

1. Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $m > 0$ taka, że dla wszystkich $n > m$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \; \bigvee_{m > 0} \; \bigwedge_{n \in N} \quad n > m \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$$

Granice niewłaściwe ciągów.

2. $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in N} \quad n>m \Rightarrow a_n > A$$

3. $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A>0} \bigvee_{m>0} \bigwedge_{n\in N} \quad n>m \Rightarrow a_n < -A$$

4. Wybrane granice ciągów (przykłady)

4.1. $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a|<1 \\ 1, & a=1 \\ \infty, & a>1 \end{cases}$$

4.2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a>0$

4.3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \left[\infty^0\right]$

4.4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \left[1^\infty\right]$

4.5. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \qquad \left[1^\infty\right]$

Twierdzenie

a) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

c) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, i $b_n \neq 0$ oraz $b \neq 0$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Granica funkcji

Pojęcie granicy funkcji jest jednym z najważniejszych pojęć matematyki, którego zrozumienie jest konieczne do opanowania rachunku różniczkowego.

Definicja (wg Cauchy'ego)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D} \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

Definicja ta jest definicją granicy właściwej w punkcie skończonym, tzn. zakładamy, że $g, x_0 \in R$

Definicja (wg Heinego)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n),\, x_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Liczba g jest więc granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, jeżeli, dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach różnych od x_0 dążącego do x_0, ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ dąży do g. W definicji Heinego nie robimy żadnych założeń odnośnie x_0 i g (zarówno x_0, jak i g mogą być skończone lub nieskończone).

Twierdzenie

Załóżmy, że istnieją granice $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g_2$. Wówczas

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = g_1 \pm g_2$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = g_1 \cdot g_2$

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g_1}{g_2}$ przy $g_2 \neq 0$

Definicja

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in D} x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$, gdzie D – dziedzina funkcji.

Definicja

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A\in R} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D}, \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A .$$

Granice jednostronne

Definicja

Funkcja $x \to f(x)$ ma w punkcie x_0 **granicę prawostronną** g, jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla x spełniających nierówność $x_0 < x < x_0 + \delta$ wartości funkcji spełniają nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$. Granicę prawostronną oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D} x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Definicja

Funkcja $x \to f(x)$ ma w punkcie x_0 **granicę lewostronną** g, jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla x spełniających nierówność $x_0 - \delta < x < x_0$ wartości funkcji spełniają nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$. Granicę lewostronną oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Można udowodnić twierdzenie wyrażające związek między granicą funkcji a granicami jednostronnymi.

Twierdzenie

Funkcja $x \to f(x)$ ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne w tym punkcie i są sobie równe.

Ciągłość funkcji

Ważnym pojęciem związanym z pojęciem granicy funkcji jest ciągłość funkcji.

Definicja

Funkcja $f(x)$ określona w punkcie x_0 jest **ciągła** w tym punkcie, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ i } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Twierdzenie

Suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie. Ponadto iloraz funkcji ciągłych w tym punkcie, w którym wartość dzielnika jest różna od zera, jest funkcją ciągłą w tym punkcie. Wielomiany, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne nazywamy funkcjami elementarnymi. Można wykazać, że funkcje elementarne oraz funkcje złożone z funkcji elementarnych są ciągłe w punktach, w których są określone.

Definicja

Funkcję ciągłą w każdym punkcie przedziału otwartego (domkniętego) nazywamy funkcją ciągłą w tym przedziale.

Przykłady

1. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{n+1}{2-3n}$. Sprawdzić, czy granicą ciągu jest $-\dfrac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{m} \bigwedge_{n > m} \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \right)$$

Liczba $-\dfrac{1}{3}$ będzie granicą ciągu (a_n), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy liczbę m taką, że gdy $n > m$, to $\left| a_n - \left(-\dfrac{1}{3} \right) \right| < \varepsilon$.

$$\left| a_n - \left(-\frac{1}{3} \right) \right| = \left| \frac{n+1}{2-3n} + \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{5}{3(2-3n)} \right| = \frac{5}{3(3n-2)} < \varepsilon.$$

Otrzymaną nierówność rozwiązujemy względem n

$$\frac{5}{3(3n-2)} < \varepsilon \Leftrightarrow 5 < \varepsilon \cdot 3(3n-2) \Leftrightarrow n > \frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Wykazaliśmy, że występująca w definicji granicy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich n większych od $\frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}$, gdzie ε – dowolna liczba dodatnia. Istnieje więc liczba $m = \frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}$, czyli $g = -\frac{1}{3}$ jest granicą danego ciągu.

2. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n} = +\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, więc mamy symbol nieoznaczony postaci $[\infty - \infty]$. Wyraz ogólny ciągu a_n przekształcamy na podstawie wzoru

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2 - b^2}{a+b},$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Ponieważ licznik i mianownik otrzymanego ułamka dążą do ∞, więc otrzymaliśmy symbol nieoznaczony typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ równoważny symbolowi $[\infty - \infty]$. Wyraz ogólny $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ możemy tak przekształcić, aby otrzymać symbol oznaczony. W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez n.

Otrzymujemy

$$a_n = \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$.

3. Na podstawie definicji Heinego wykazać, że $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n),\, x_n \neq x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Niech (x_n), $x_n \neq 2$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.
Odpowiada mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ o wyrazie ogólnym

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 8}{x_n - 2} = \frac{(x_n - 2)(x_n^2 + 2x_n + 4)}{x_n - 2} = x_n^2 + 2x_n + 4,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 2x_n + 4) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + 2\lim_{n\to\infty} x_n + 4 = 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12.$$

Z definicji wynika więc, że granicą danej funkcji w punkcie 2 jest 12.

4. Obliczyć granicę funkcji $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Rozwiązanie

Dla $x = 0$ licznik i mianownik funkcji $x \to \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ są równe zeru, więc mamy symbol nieoznaczony typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Ponieważ $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, więc $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\cdot 1 = 2.$$

Korzystaliśmy z twierdzenia $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Zadania

1. Wykazać na podstawie definicji, że:

a) $\lim\left(\dfrac{n}{2n-1}\right) = \dfrac{1}{2}$; b) $\lim\left(\dfrac{n^2-1}{3n^2+1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

2. Obliczyć granice ciągu:

a) $\lim n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$; b) $\lim \sqrt[n]{3^n + 5^n}$; c) $\lim\left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^n$.

3. Wyznaczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

4. Dla jakich wartości parametru a funkcja

$$x \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła?

Odpowiedzi:

2. a) $\frac{1}{2}$; b) 5; c) 1, 3. a) $\frac{3}{4}$; b) 8; c) ∞. 4. 3.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	III § 1, 2, 3
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	III
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	III, IV