Rok I	Temat 6	**GEOMETRIA ANALITYCZNA**

1. Płaszczyzna
2. Prosta

Płaszczyzna

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i prostopadłej do wektora niezerowego $\vec{n} = [A, B, C]$

$$\pi: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie ogólne płaszczyzny π

$$\pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right)$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane trzy punkty nie leżące na jednej prostej

$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\quad P_1(x_1, y_1, z_1)$, $\quad P_2(x_2, y_2, z_2)$ – punkty leżące na płaszczyźnie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Kąt między płaszczyznami π_1, π_2:

$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad \pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\vec{n_1} = [A_1, B_1, C_1]$, $\quad \vec{n_2} = [A_2, B_2, C_2]$ – wektory normalne (prostopadłe) odpowiednio do płaszczyzn π_1, π_2.

$$\varphi = \measuredangle(\pi_1, \pi_2) = \measuredangle(\overline{n}_1, \overline{n}_2)$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Warunek prostopadłości płaszczyzn

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Warunek równoległości płaszczyzn

$$\pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \| \vec{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Jeżeli w liczniku jest zero, to przyjmujemy w mianowniku również zero.
Odległość punktu $P_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ od płaszczyzny π: $\qquad Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = d(P_0,\, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

Prosta w przestrzeni trójwymiarowej

Równania parametryczne prostej $\quad l: \begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases} \quad t \in R,$

gdzie $P_0(x_0,\, y_0,\, z_0) \in l$, $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \| l,\ t \in R$ $\vec{a}$ (niezerowy wektor kierunkowy prostej l).

Równanie kanoniczne prostej

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Kąt φ między prostymi l_1, l_2 o wektorach kierunkowych $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$$l_1: \begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad l_2: \begin{cases} x = x_1 + ub_x \\ y = y_1 + ub_y \\ z = z_1 + ub_z \end{cases} \quad u \in R$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,.$$

Warunek prostopadłości prostych l_1, l_2: $\quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Warunek równoległości prostych l_1, l_2: $\quad l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

Warunek komplanarności prostych l_1, l_2 (proste l_1, l_2 leżą w jednej płaszczyźnie):

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0$$

gdzie $P_0(x_0,\, y_0,\, z_0)\in l_1$, $\qquad P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\in l_2$.

Odległość punktu $P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ od prostej l: $\quad d=d(P_1,l)=\dfrac{\left|\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$

Odległość prostych skośnych l_1, l_2: $\quad d=d(l_1,l_2)=\dfrac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$.

Przykłady

1. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty $A(2,0,1), B(-3,1,2), C(4,2,-3)$.

Rozwiązanie

$\pi: A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$, gdzie $P_o(x_o,y_o,z_o)\in\pi$ i $\pi=[A,B,C]$, $\bar{n}\perp\pi$.

Znajdujemy wektor $\bar{n}=\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}$.

Wyznaczamy wektory $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=[-3-2,1-0,2-1]=[-5,1,1]$, $\quad \overrightarrow{AC}=[4-2,2-0,-3-1]=[2,2,-4]$,

$$\bar{n}=\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=-6\bar{i}-18\bar{j}-12\bar{k}.$$

Wyznaczamy równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(2,0,1)$ i prostopadłej do wektora $\bar{n}=[-6,-18,-12]$

$\pi:-6(x-2)-18(y-0)-12(z-1)=0$. $\quad$ Ostatecznie $\pi: x+3y+2z-4=0$

2. Wyznaczyć równanie prostej l przechodzącej przez punkty $P_1(0,2,-3)$ i $P_2(1,0,5)$. Znaleźć odległość punktu $P_3(-2,3,1)$ od wyznaczonej prostej.

Rozwiązanie

a) Wyznaczamy równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\bar{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$\overline{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=[1,-2,8]\,,\ l:\begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=-3+8t \end{cases},\ t\in R\,.$$

Równanie kanoniczne (kierunkowe) prostej l $\quad l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{8}\,.$

b) Odległość punktu P_3 od prostej l wyznaczamy ze wzoru:

$$d=d(P_3,l)=\frac{\left|\overline{a}\,x\,\overrightarrow{P_1P_3}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\,,$$

$$\overrightarrow{P_1P_3}=[-2,1,4],\qquad \overline{a}\,x\,\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-16\overline{i}-20\overline{j}-3\overline{k}\,,$$

$$d=\frac{\sqrt{16^2+20^2+3^2}}{\sqrt{1^2+2^2+8^2}}=\frac{\sqrt{665}}{\sqrt{69}}\,.$$

3. Obliczyć odległość prostych skośnych l_1 i l_2:

$$l_1:\begin{cases} x=-3+4t \\ y=6-3t \\ z=3+2t \end{cases},\ l_2:\frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}\,.$$

Rozwiązanie

Odległość prostych skośnych l_1, l_2:

$$d=d(l_1,l_2)=\frac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right|}\,.$$

$P_0(-3,6,3)\in l_1$, $P_1(4,-1,-7)\in l_2$ $\qquad \overline{a}=[4,-3,2], \overline{a}\,||\,l_1$; $\qquad \overline{b}=[8,-3,3]$, $\qquad \overline{b}\,||\,l_2$.

$\overrightarrow{P_0P_1}=[7,-7,-10]$

$$\overline{a}\,x\,\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-3\overline{i}+4\overline{j}+12\overline{k}\,,\qquad (\overline{a}\,x\,\overline{b})\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & -10 \end{vmatrix}=-169\,,$$

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{|-169|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13.$$

Zadania

1. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2,1,-2)$ i prostopadłej do wektora $\overline{n} = [2,-4,6]$.
2. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(0,0,1), P_2(5,0,0), P_3(1,1,1)$.
3. Obliczyć kąt między prostą $l: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ a płaszczyzną $3x - 5y - z + 2 = 0$.
4. Obliczyć odległość między prostymi l_1 i l_2:
$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$, $l_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{6}$.
5. Obliczyć odległość punktu $P_0(1,-1,-2)$ od prostej $l: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = -2 + 4t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$.

Odpowiedzi
1. $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2. $x - y + 5z - 5 = 0$; 3. prosta jest równoległa do płaszczyzny;
4. $\sqrt{10}$; 5.7.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	II § 4, 5, 6
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	-
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	XIV