Rok I	Temat 5	**RACHUNEK WEKTOROWY**

1. Iloczyn skalarny
2. Iloczyn wektorowy
3. Iloczyn mieszany

Iloczyn skalarny

Dane są wektory: $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, $\vec{c} = [c_x, c_y, c_z]$.

Długość wektora $\vec{a}$ dana jest wzorem $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\angle\left(\bar{a}, \bar{b}\right)\right)$.

Postać kartezjańska iloczynu skalarnego: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Warunek prostopadłości (ortogonalności) wektorów

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\left(\vec{a} \parallel \vec{b}\right)$ nazywamy wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ spełniający warunki:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
2. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$

3. Zwrot wektora $\vec{c}$ jest taki, że trójka wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jest zgodnie zorientowana z trójką wersorów $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Jeżeli $\vec{a} \parallel \vec{b}$ to $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} = [0, 0, 0]$.

Własności iloczynu wektorowego

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3. $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\left(\mu\vec{b}\right)=\lambda\mu\left(\vec{a}\times\vec{b}\right), \qquad \lambda,\mu\in R$

Współrzędne iloczynu wektorowego obliczamy ze wzoru

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{j}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$$

Warunek równoległości wektorów: $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

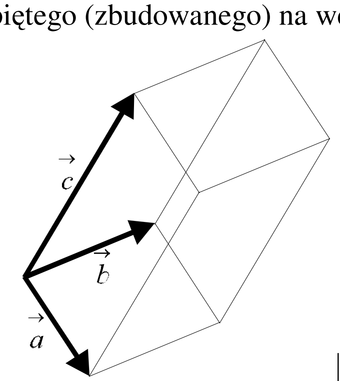
Iloczyn mieszany wektorów

Iloczynem mieszanym wektorów $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nazywamy wyrażenie (skalar)

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$$

Iloczyn mieszany obliczamy ze wzoru: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Objętość V równoległościanu rozpiętego (zbudowanego) na wektorach $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (rysunek)



$$|V|=\left|\left(\overline{a}\ x\ \overline{b}\right)\overline{c}\right|.$$

Rys.

Wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są **komplanarne** (równoległe do jednej płaszczyzny) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c} = 0 .$$

Przykłady

Postać kartezjańska iloczynu skalarnego: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

1. Dane są punkty $A(1,2,0), B(-3,0,5), C(0,4,1)$. Znaleźć kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Rozwiązanie

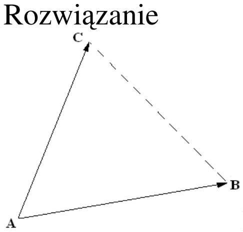
Znajdujemy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AB} = [-4,-2,5]$, $\overrightarrow{AC} = [-1,2,1]$.

Obliczamy cosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. $\left(\varphi = K\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right)$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$

$$\cos\varphi = \frac{-4\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+5\cdot 1}{\sqrt{4^2+2^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \arccos\frac{1}{3} .$$

2. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(2,3,-1)$, $B(4,-2,3)$, $C(-1,4,2)$.

Rozwiązanie



Rys.

Z określenia iloczynu wektorowego wynika, że pole trójkąta ABC jest równe połowie długości iloczynu wektorowego wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ (rys.) [WI 7]

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [4-2,-2-3,3-(-1)] = [2,-5,4], \quad \overrightarrow{AC} = [-1-2,4-3,2-(-1)] = [-3,1,3] .$$

3. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(3,4,5)$, $B(2,1,-3)$, $C(4,-2,1)$, $D(1,2,6)$.

Rozwiązanie

Objętość V równoległościanu zbudowanego na wektorach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ o wspólnym początku równa się wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego tych wektorów.

$V = \left|\left(\bar{a}\, x\, \bar{b}\right)\bar{c}\right|$

Objętość V_1 czworościanu zbudowanego na wektorach $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ jest równa $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu czyli $V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{a}\, x\, \overline{b}\right)\overline{c}\right|$. Niech $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{b} = \overrightarrow{AC}$, $\overline{c} = \overrightarrow{AD}$.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

$$\overline{a} = [-1, -3, -8],\ \overline{b} = [1, -6, -4],\ \overline{c} = [-2, -2, 1].$$

Iloczyn mieszany wektorów $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ obliczamy ze wzoru:

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{a}\, x\, \overline{b}\right)\overline{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & -3 & -8 \\ 1 & -6 & -4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 105 = \frac{35}{2}\ [j^3].$$

Zadania

1. Znaleźć wektor $\vec{x}$ prostopadły do wektorów $\vec{a} = [1, -2, 3]$ i $\vec{b} = [2, 3, -1]$ taki, że $\vec{a}\cdot\vec{d} = -6$, gdzie $\vec{d} = [2, -1, 1]$.

2. Dane są punkty $P_1(1,2,4)$, $P_2(5,1,2)$ i $P_3(3,4,1)$.
Znaleźć wersor wektora $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}\, x\, \overrightarrow{P_1P_3}$.

3. Wykazać, że wektory $\vec{a} = [3,4,-2], \vec{b} = [6,-4,-1], \vec{c} = [-14,-1,5]$ nie są komplanarne.

Odpowiedzi

1. $\vec{x} = [-3,3,3]$; 2. $\left[\frac{7}{213}, \frac{8}{213}, \frac{10}{213}\right]$.

Lp.	Literatura	Rozdział
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	II § 3
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	-
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	XIII