Rok I	Temat 4	**UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH**

1. Układ równań Cramera 2. Metoda macierzowa 3. Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Układ równań Cramera

Układ n równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, ..., x_n$ postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

którego **macierz główna** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ (macierz utworzona ze współczynników przy niewiadomych) jest nieosobliwa $(\det \mathbf{A} \neq 0)$ nazywamy układem Cramera.
Wprowadzamy oznaczenia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ – macierz główna układu (1)}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ – macierz (kolumna) niewiadomych, } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \text{ – macierz (kolumna) wyrazów wolnych}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, ..., n$$

Macierz $\mathbf{A}_k$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ przez zastąpienie k-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych. Rozwiązania układu równań Cramera otrzymujemy stosując wzory Cramera

$$x_k = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}}, \quad k = 1, 2, ..., n$$

2. **Metoda macierzowa rozwiązywania układu równań Cramera**

Układ równań Cramera możemy zapisać w postaci macierzowej (o niewiadomej macierzy $\mathbf{X}$)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{2}$$

Rozwiązanie układu (2) otrzymujemy po pomnożeniu lewostronnie przez macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \text{stąd} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

3. **Układ m równań liniowych o n niewiadomych**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

Oznaczamy

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ – macierz główna układu (3), $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ – **macierz uzupełniona** (rozszerzona).

Twierdzenie (Kroneckera–Capelliego)

Układ równań (3) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rzędy macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równe $\left(R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})\right)$.

Do rozwiązania układu równań (3) możemy stosować wzory Cramera. Załóżmy, że $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = r$, $r \le \min(n, m)$. Istnieje wówczas podwyznacznik (minor) macierzy $\mathbf{A}$ stopnia r różny od zera (np. złożony z pierwszych r wierszy i pierwszych r kolumn macierzy $\mathbf{A}$). Wówczas układ (3) jest równoważny (ma ten sam zbiór rozwiązań) układowi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

Układ (4) jest układem równań Cramera, w którym za niewiadome $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_r$ podstawiamy dowolne liczby (stałe).

Układ równań liniowych postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

nazywamy układem równań liniowych **jednorodnych**. Układ równań (5) ma zawsze rozwiązanie.

Twierdzenie
Jeżeli układ równań liniowych jednorodnych (5) nie jest układem Cramera $(\det A = 0)$, to układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań niezerowych.

Przykłady

1. Rozwiązać układ równań stosując wzory Cramera:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y - z = 0, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A oraz wyznaczniki macierzy $A_K \left(k = 1,2,3\right)$ powstałych z macierzy A przez zastąpienie k-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6, \qquad \det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6, \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 6.$$

Następnie korzystamy ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = 1, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = 1, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = 1.$$

2. Rozwiązać układ równań z przykładu 1 metodą macierzową.

Rozwiązanie

Zapis macierzowy układu równań: $AX = B$, stąd $X = A^{-1} \cdot B$,

gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\det A = 6$.

Następnie wyznaczamy macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^D\right)^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ zatem } x = y = z = 1.$$

3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+y+3z=11 \\ 8x+5y+5z=21. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Ponieważ liczba niewiadomych nie równa się ilości równań, układ równań nie jest układem Cramera. Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capellego rozstrzygamy czy układ ma rozwiązanie.

Wyznaczamy rząd macierzy głównej na podstawie definicji rzędu macierzy:

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$. Obliczamy np. wyznacznik macierzy C utworzonej z trzech pierwszych wierszy macierzy A. Ponieważ $\det C=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-12\neq 0$, więc $R(A)=3$.

Następnie wyznaczamy rząd macierzy uzupełnionej $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 8 & 5 & 5 & 21 \end{bmatrix}$.

Wykonujemy następujące operacje elementarne na wierszach macierzy B: mnożymy wiersz drugi przez 2 i dodajemy do wiersza trzeciego, a następnie otrzymany wiersz trzeci odejmujemy od wiersza czwartego.

Otrzymujemy macierz $D=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ o rzędzie równym rzędowi macierzy B.

$R(D)=R(B)\leq 3$. Ponieważ $R(A)=3$ oraz $R(A)\leq R(B)$, więc $R(B)=3$.

Stąd $R(A)=R(B)=3$, więc układ równań ma rozwiązanie (twierdzenie Kroneckera-Capellego).

Rozważany układ jest równoważny układowi równań Cramera o macierzy głównej C:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}.$$

Następnie obliczamy wyznaczniki macierzy $C_K\,(k=1,2,3)$ utworzonych przez zastąpienie k-tej kolumny macierzy C kolumną wyrazów wolnych.

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24,\ \det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ \det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -36.$$

Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$x = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-24}{-12} = 2,\ y = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{24}{-12} = -2,\ z = \frac{\det C_3}{\det C} = \frac{-36}{-12} = 3.$$

Łatwo sprawdzić, że liczby 2, -2, 3 są również rozwiązaniami czwartego równania rozwiązywanego układu równań.

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x - 6y + 2w + 3z = 2, \\ 2x - 3y + 5w + 7z = 1, \\ 2x - 3y - 11w - 15z = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dany układ nie jest układem Cramera, należy sprawdzić czy ma on rozwiązanie (jest niesprzeczny).

Wyznaczamy rząd macierzy głównej układu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że wszystkie cztery podwyznaczniki macierzy A stopnia trzeciego są równe zeru, więc rząd tej macierzy $R(A) < 3$. Ponieważ np. podwyznacznik $\det C = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, więc $R(A) = 2$.

Wyznaczamy rząd macierzy uzupełnionej $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{bmatrix}$.

Wykonujemy następujące operacje elementarne na wierszach macierzy B: odejmujemy wiersz drugi od trzeciego oraz wiersz drugi pomnożony przez 2 od pierwszego. Otrzymujemy macierz:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mnożąc wiersz pierwszy macierzy D przez 2 i odejmując od wiersza trzeciego mamy macierz:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(E) = 2.$$

Ponieważ rzędy macierzy E, D, B są równe, więc $R(A) = R(B) = 2$ (twierdzenie Kroneckera-Capellego).
Dany układ sprowadzamy do równoważnego układu Cramera. Ponieważ $\det C = -1 \neq 0$, więc odrzucamy trzecie równanie danego układu oraz podstawiamy dowolne stałe $c, d\ (c, d \in R)$ za niewiadome x, y.
Otrzymujemy układ równań Cramera:

$$\begin{cases} 2w + 3z = 2 - 4c + 6d, \\ 5w + 7z = 1 - 2c + 3d. \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki macierzy C_1, C_2 utworzonych przez zastąpienie odpowiednio pierwszej i drugiej kolumny macierzy C kolumną wyrazów wolnych.

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 2 - 4c + 6d & 3 \\ 1 - 2c + 3d & 7 \end{vmatrix} = -22c + 33d + 11, \quad \det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 - 4c + 6d \\ 5 & 1 - 2c + 3d \end{vmatrix} = 16c - 24d - 8.$$

Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$w = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-22c + 33d + 11}{-1} = 22c - 33d - 11, \quad z = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{16c - 24d - 8}{-1} = -16c + 24d + 8,$$
$$x = c, \quad y = d.$$

Rozpatrywany układ (nieoznaczony) ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od przyjętych wartości c, d. Np. dla $c = 0, d = 1$ otrzymujemy rozwiązanie $x = 0, y = 1, w = -44, z = 32$.

Zadania

1. Rozwiązać metodą Cramera układy równań:

a) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$.

2. Rozwiązać metodą macierzową układy równań;

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=11 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}$.

3. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} 4x-7y+z=5 \\ 3x-5y+z=2 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-y+5z=3 \\ 2x-2y-3z=4 \\ x-y+2z=1 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$.

Odpowiedzi:

1. a) $1,2,0$; b) $1,2,3,4$; 2. a) $2,-2,3$; b) $-1,-1,0,1$; 3. a) układ sprzeczny; b) $\frac{10}{7},-\frac{1}{7},-\frac{2}{7}$; c) $0,0,0,C_1,C_2$.

Lp.	Literatura	Rozdział
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 4
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 1.4.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	II