Rok I	Temat 3	**WYZNACZNIKI. MACIERZE C.D.**

1	Definicja wyznacznika
2	Własności wyznaczników
3	Macierz odwrotna
4	Rząd macierzy

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ stopnia n nazywamy wielomian zmiennych a_{ij} przyporządkowany tej macierzy. Jeżeli elementy macierzy $\mathbf{A}$ są liczbami wówczas wyznacznik tej macierzy jest liczbą.

Wyznacznik oznaczamy symbolami:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \det \mathbf{A}, \quad |\mathbf{A}|, \text{ (determinant – łac. wyznacznik)}$$

Wyznacznik $\det \mathbf{A}$ macierzy $\mathbf{A}$ definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

1. $n=1,\ \mathbf{A}=\left[a_{11}\right] \qquad \det \mathbf{A}=a_{11}$.

2. $n>1 \qquad \det \mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\mathbf{A}_{1i}^{*}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\mathbf{A}_{1i}$.

Wzór ten nazywamy **rozwinięciem** wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$ względem elementów pierwszego wiersza. $\mathbf{A}_{ij}^{*}=(-1)^{i+j}\mathbf{A}_{ij}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$, natomiast $\mathbf{A}_{ij}$ – **podwyznacznikiem** (minorem) stopnia $n-1$ macierzy $\mathbf{A}$ otrzymanym przez skreślenie elementów i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy $\mathbf{A}$.
Dla $n=2$ otrzymujemy

$$\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\mathbf{A}_{11}^{*}+a_{12}\mathbf{A}_{12}^{*}=a_{11}(-1)^{1+1}\mathbf{A}_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}\mathbf{A}_{12}=$$
$$=a_{11}\mathbf{A}_{11}-a_{12}\mathbf{A}_{12}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Sposób Sarrusa

Wyznacznik stopnia trzeciego możemy obliczyć według następującego schematu. Z prawej strony wyznacznika dopisujemy pierwszą i drugą kolumnę (lub pod wyznacznikiem dopisujemy pierwszy i drugi wiersz). Następnie (rys. 1) obliczamy iloczyny elementów z odpowiednim znakiem

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{c|ccc|cc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & + & + \quad + \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + \ldots - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Rys. 1

Własności wyznaczników ułatwiające ich obliczanie.

1. Wyznacznik możemy rozwijać względem dowolnego wiersza (kolumny)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}^{*} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

2. Wyznacznik danej macierzy $\mathbf{A}$ równa się wyznacznikowi macierzy transponowanej
$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{T}$$

3. Jeżeli macierz $\mathbf{B}$ utworzona jest z macierzy $\mathbf{A}$ przez przestawienie miejscami dwóch wierszy (kolumn), to wyznacznik zmienia wartość na przeciwną
$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$$

4. Wyznacznik macierzy mającej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer równa się zeru.

5. Mnożenie wyznacznika przez liczbę λ polega na mnożeniu elementów jednego dowolnego wiersza (kolumny) przez tę liczbę.

6. Wyznacznik macierzy, w której dwa wiersze (kolumny) są równe lub proporcjonalne równa się zeru.

7. Wartość wyznacznika nie zmienia się, gdy do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę.

Twierdzenie
Suma iloczynów elementów wiersza (kolumny) *i* przez dopełnienia algebraiczne elementów wiersza (kolumny) *j* równa się wartości wyznacznika, gdy $i = j$ oraz równa się zeru gdy $i \neq j$:

$$a_{i1}A_{j1}^{*} + a_{i2}A_{j2}^{*} + ... + a_{in}A_{jn}^{*} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}^{*} + a_{2i}A_{2j}^{*} + ... + a_{ni}A_{nj}^{*} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Twierdzenie (tw. Cauchy'ego)
Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych *A* i *B* równa się iloczynowi wyznaczników tych macierzy.
$\det(AB) = \det A \det B$

Definicja
Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{nxn}$ nazywamy macierzą nieosobliwą, gdy $\det A \neq 0$. Jeżeli $\det A = 0$, to macierz *A* nazywamy macierzą osobliwą.

Twierdzenie
Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy kwadratowej *A* istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy *A* jest macierzą nieosobliwą.

Definicja
Macierzą dołączoną A^D macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{nxn}$ nazywamy macierz
$A^D = [A_{ij}^{*}]^T$, gdzie $[A_{ij}^{*}]$ jest macierzą dopełnień algebraicznych elementów a_{ij} macierzy *A*.

Twierdzenie
Jeżeli *A* jest macierzą nieosobliwą $(\det A \neq 0)$, to $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$.

Twierdzenie

Jeżeli *A* i *B* są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi tego samego stopnia, to

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Twierdzenie (wybrane własności macierzy odwrotnej)
1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
2. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$,
3. $(\det^{-1})^{-1} = A$.

Rząd macierzy

Definicja

Rzędem macierzy $A=[a_{ij}]_{nxm}$ nazywamy najwyższy stopień jej dowolnego podwyznacznika (minora) różnego od zera.
Rząd macierzy *A* oznaczamy symbolem *R(A)* (lub *(r(A)*). Z definicji rzędu macierzy wynika, że

$$0 \le R(A) \le \min(n,m).$$

Definicja

Jeżeli macierz $B=[b_{ij}]_{nxm}$ powstaje w wyniku dokonania skończonej liczby operacji elementarnych na wierszach (kolumnach) macierzy $A=[a_{ij}]_{nxm}$, to *A* i *B* nazywamy macierzami równoważnymi (oznaczamy *A*~*B*).

Twierdzenie

Macierz *A* i *B* są równoważne wtedy tylko wtedy, gdy ich rzędy są równe, czyli

$$A\text{~}B \Leftrightarrow R(A)=R(B)$$

Jeżeli macierz *B* równoważna macierzy *A* powstała w wyniku wielokrotnego wykonywania operacji elementarnych na wierszach (kolumnach) macierzy *A* składa się z maksymalnej liczby zer, wówczas rząd macierzy *A* ($R(B)=R(A)$) równa się ilości kolumn (wiemy) macierzy *B,* w których są elementy różne od zera.

Przykłady

1. Na podstawie definicji obliczyć wyznacznik macierzy $A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{3x3}$ stopnia trzeciego.

Rozwiązanie

$$\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\mathbf{A}_{11}^{*}+a_{12}\mathbf{A}_{12}^{*}+a_{13}\mathbf{A}_{13}^{*}=a_{11}\mathbf{A}_{11}-a_{12}\mathbf{A}_{12}+a_{13}\mathbf{A}_{13}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{13} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ostatecznie (po obliczeniu wyznaczników stopnia drugiego) otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

2. W oparciu o własności wyznacznika obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Ponieważ w kolumnie piątej i wierszu trzecim występuje zero możemy np. otrzymać jeszcze trzy zera w kolumnie piątej wykonując następujące operacje elementarne na wierszach macierzy A:
dodajemy wiersz piąty do wiersza pierwszego i drugiego oraz dodajemy do wiersza czwartego wiersz piąty pomnożony przez 5.
Otrzymujemy wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 17 & 6 & -4 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

. Następnie $\det A$ rozwijamy względem piątego wiersza kolumny

$$\det A = -1(-1)^{5+5} A_{55} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 17 & 6 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

Stosując operacje elementarne na wierszach możemy otrzymać zera w kolumnie trzeciej. Mnożymy wiersz drugi przez 2 a następnie odejmujemy go od wiersza trzeciego i dodajemy do wiersza czwartego i otrzymujemy w kolumnie trzeciej trzy zera.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & 0 & -9 \\ 25 & 12 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

. Wyznacznik $\det A$ rozwijamy względem trzeciej kolumny.

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -5 & -5 & -9 \\ 25 & 12 & 17 \end{vmatrix} = 1060.$$

3. Wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

$$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\4&5&4\\1&2&3\end{vmatrix}=8, \text{ ponieważ } \det A\neq 0 \text{ macierz odwrotna do macierzy } A \text{ istnieje.}$$

Wyznaczamy elementy macierzy dopełnień algebraicznych
$\left[A_{ij}^{*}\right]=\left[(-1)^{i+j}A_{ij}\right]$ $1\le i,\ j\le 3$.

$$A_{11}^{*}=A_{11}=\begin{vmatrix}5&4\\2&3\end{vmatrix}=7,\ A_{12}^{*}=-A_{12}=-\begin{vmatrix}4&4\\1&3\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{13}^{*}=A_{13}=\begin{vmatrix}4&5\\1&2\end{vmatrix}=3,\ A_{21}^{*}=-A_{21}=-\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{22}^{*}=A_{22}=\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}=8,\ A_{23}^{*}=-A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=-4.$$

$$A_{31}^{*}=A_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\5&4\end{vmatrix}=3,\quad A_{32}^{*}=-A_{32}=-\begin{vmatrix}3&1\\4&4\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{33}^{*}=A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\4&5\end{vmatrix}=7.$$

$$\left[A_{ij}^{*}\right]=\begin{bmatrix}7&-8&3\\-4&8&-4\\3&-8&7\end{bmatrix},\quad A^{D}=\left[A_{ij}^{*}\right]^{T}=\begin{bmatrix}7&-4&3\\-8&8&-8\\3&-4&7\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{D}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7&-4&3\\-8&8&-8\\3&-4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{8}\\-1&1&-1\\\frac{3}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{7}{8}\end{bmatrix}$$

Możemy sprawdzić, że $A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&4\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{8}\\-1&1&-1\\\frac{3}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{7}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

4. Obliczyć rząd macierzy $A=\begin{bmatrix}4&3&-8&2&7\\8&6&-7&4&2\\4&3&-5&2&3\\8&6&-1&4&-6\\4&3&1&2&-5\end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Stosujemy np. następujące operacje elementarne na wierszach macierzy A: od wiersza drugiego i czwartego odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2 oraz odejmujemy wiersz pierwszy od wiersza trzeciego i piątego i otrzymujemy macierz B ($R(A) = R(B)$):

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Następnie od trzeciego wiersza macierzy B odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $\frac{1}{3}$, od czwartego drugi pomnożony przez $\frac{5}{3}$ oraz od piątego drugi.

Otrzymujemy macierz $$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ wiersz pierwszy i drugi macierzy nie zawierają odpowiednich elementów proporcjonalnych nie otrzymamy kolejnego (pierwszego lub drugiego) wiersza zawierającego wyłącznie zera. Stąd $R(C) = R(B) = R(A) = 2$.

Zadania

1. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

2. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$;

3. Określić rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$;

Odpowiedzi

1. a) -48; 2. a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; 3. a) 2;

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 2
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 1.2.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	I