Rok I	Temat 2	**MACIERZE. ALGEBRA MACIERZY**

1	Definicja macierzy
2	Działania algebraiczne na macierzach
3	Macierz odwrotna

Definicja

Macierzą nazywamy skończony ciąg liczbowy (a_{ij}), gdzie $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ zapisany w postaci tablicy prostokątnej o n wierszach i m kolumnach

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy o pierwszym wskaźniku (indeksie) i tworzą i-ty wiersz; wszystkie elementy o drugim wskaźniku j tworzą j-tą kolumnę macierzy.
Stosujemy następujące oznaczenia macierzy

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}, \qquad \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right], \qquad \mathbf{A}$$

Symbol $n\times m$ nazywamy **wymiarem** macierzy. Jeżeli $n = m$, to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy **macierzą kwadratową** n-tego stopnia $(st\,\mathbf{A} = n)$. Elementy a_{ii} $(i = 1,2,...,n)$ macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ tworzą główną przekątną.

Macierz kwadratową $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nazywamy **macierzą jednostkową**.

Macierz, której każdy element jest zerem nazywamy **macierzą zerową** i oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$.

Macierzą transponowaną macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ nazywamy macierz $\mathbf{A}^T = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$.

Macierze $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ i $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ nazywamy **równymi** $(\mathbf{A} = \mathbf{B})$, jeżeli ich odpowiednie elementy są równe: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,...,n,$ $j = 1,2,...,m$

Sumą macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ i $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ nazywamy macierz $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]_{n\times m}$ $(\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B})$ o elementach $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n,$ $j = 1, 2, ..., m$.

Iloczynem macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ i liczby λ nazywamy macierz $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$, $(\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A})$, gdzie $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$.

Definicja
Zakładamy, że liczba kolumn macierzy $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times k}$ równa się liczbie wierszy macierzy $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{k\times m}$. **Iloczynem macierzy** $\mathbf{A}$ i macierzy $\mathbf{B}$ nazywamy macierz $\mathbf{C}=\left[c_{ji}\right]_{n\times m}$ $(\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, której elementy są postaci $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$, $i=1,2,...,n,\ \ j=1,2,...,m$.

Mnożenie macierzy nie jest, na ogół, przemienne $(\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA})$.

Definicja
Macierzą odwrotną względem danej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy macierz $\mathbf{A}^{-1}$ taką, że $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{J}$.

Twierdzenie
Zakładamy, że działania na macierzach są wykonalne.
$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C)$
$(AB)C=A(BC),\ A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)^T=A^T+B^T,\ (AB)^T=B^TA^T$.

Przykłady
1. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$
Wykazać, że $(A+B)^T=A^T+B^T$.

Rozwiązanie
$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}.$$
$$(A+B)^T=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}^T=$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^T+B^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$
zatem $(A+B)^T=A^T+B^T$.

2. Korzystając z definicji macierzy odwrotnej wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy
$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Szukamy macierzy $A^{-1}=\begin{bmatrix} x & y \\ t & u \end{bmatrix}$ takiej, że $A\cdot A^{-1}=J$, czyli $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ t & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Stąd $\begin{bmatrix} 2x-t & 2y-u \\ 3x+5t & 3y+5u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-t=1 \\ 3x+5t=0 \\ 2y-u=0 \\ 3y+5u=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{5}{13} \\ y=\frac{1}{13} \\ t=-\frac{3}{13} \\ u=\frac{2}{13} \end{array}$, więc $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$.

3. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. Wykazać, że $(AB)^T=B^TA^T$

Rozwiązanie

$(AB)^T=\begin{bmatrix} 13 & 1 & 11 \\ -19 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & -28 \end{bmatrix}$,

$B^T\cdot A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 1 & 11 \\ -19 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & -28 \end{bmatrix}$

Zadania

1. Dane są macierze: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Wykazać, że:
a) $(A+B)+C=A+(B+C)$; b) $A(BC)=(AB)C$; c) $(A+B)^T=A^T+B^T$;
d) $(A+B)C=AC+BC$; e) $A(B+C)=AB+AC$; f) $(AB)^T=B^TA^T$.

2. Wyznaczyć macierz X z równania:
a) $X\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}X\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $X\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\\5 & -1\\1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 - 15\end{bmatrix}$

Odpowiedzi:

2. a) $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}-28 & 93\\38 & -126\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 3
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 1.2.-1.3.
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	I