Rok I	Temat 1	**ZBIÓR LICZB ZESPOLONYCH**

1	Definicja liczby zespolonej
2	Działania w zbiorze liczb zespolonych
3	Postać kartezjańska liczby zespolonej
4	Postać trygonometryczna. Wzór de Moivre'a
5	Pierwiastkowanie liczb zespolonych
6	Równania algebraiczne

Definicja (W.R. Hamilton (1805-1865))

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych. W zbiorze par liczb rzeczywistych postaci (*a, b*) definiujemy pojęcie równości oraz działania dodawania i mnożenia:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d \ ,$$
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ ,$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)\ .$$

Zbiór $Z=\{(a,b);\ a,b\in R,=,+,\cdot\}$ nazywamy zbiorem liczb zespolonych.

Niech $z_1=(a,b),\qquad z_2=(c,d)$.
Można wykazać następujące prawa dla działań w zbiorze *Z*.

$z_1+z_2=z_2+z_1$ (prawo przemienności dodawania)
$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (prawo łączności dodawania)
$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (prawo przemienności mnożenia)
$(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$ (prawo łączności mnożenia)
$z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ (prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania)

Definicja
Różnicą liczb zespolonych (a,b) i (c,d) nazywamy taką liczbę zespoloną (x,y), że
$(c,d)+(x,y)=(a,b)$
Stąd otrzymujemy $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$.
Liczbą zespoloną $z=(0,0)$ nazywamy liczbę zespoloną zero (oznaczamy 0=(0,0)
$z\neq 0 \Leftrightarrow (a,b)\neq(0,0) \Leftrightarrow (a\neq 0 \vee b\neq 0) \Leftrightarrow a^2+b^2>0$

Definicja
Ilorazem liczb zespolonych $(a,0)$ i (c,d) $(c^2+d^2>0)$ nazywamy liczbę zespoloną (x,y) taką, że $(c,d)\cdot(x,y)=(a,b)$.
Stąd otrzymujemy: $\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
Rozpatrzmy podzbiór Z_1 zbioru Z $(Z_1\subset Z)$ postaci

$$Z_1=\{(a,0);\ a\in R,=,+,\cdot\ \}$$

Zbiór Z_1 utożsamiamy ze zbiorem R $(R\subset Z)$
Liczbę zespoloną $(a,0)$ oznaczamy przez *a*, czyli $(a,0)=a$.

Postać kartezjańska liczby zespolonej

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$$

Liczbę zespoloną $(0,1)$ oznaczamy symbolem *i* i nazywamy jednostką urojoną $i=(0,1)$.

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

Otrzymujemy $z=(a,b)=a+bi$. Tę postać nazywamy postacią kartezjańską liczby zespolonej. Liczbę rzeczywistą *a* (poprzednik pary (a,b)) nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej i oznaczamy symbolem $\operatorname{Re} z=a$, natomiast liczbę rzeczywistą *b* (następnik pary (a,b)) nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej i oznaczamy symbolem $\operatorname{Im} z=b$.

Zdefiniowane działania dodawania i mnożenia w zbiorze Z formalnie wykonujemy tak, jak działania na wielomianach stopnia pierwszego względem jednostki urojonej i uwzględniając równość $i^2=-1$.

Np.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+(ad+bc)i+bd\cdot(-1)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Definicja

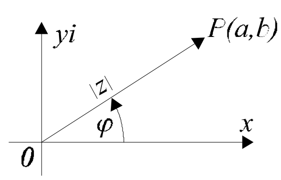
Liczbą zespoloną $\overline{z}=a-bi$ nazywamy liczbę sprzężoną z liczbą $z=a+bi$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Modułem liczby zespolonej $z=a+bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Argumentem liczby $z=a+bi$ nazywamy kąt φ, jaki tworzy wektor $\overrightarrow{0P}$ (przedstawiony na rysunku) z dodatnim zwrotem osi *0X*



Rys.

Dla liczby $z=0$ argumentu nie określamy.

Argumentem głównym $Arg\,z=\varphi_0$ nazywamy kąt φ_0 spełniający nierówność $0\le\varphi_0<2\pi$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Wzór de Moivre`a $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Wzór Eulera $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równanie $w^n = z$.
Niech w_k oznacza k-ty pierwiastek n-tego stopnia z liczby zespolonej $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Przykłady

1. Obliczyć $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ dla $z = 2 + 3i$.

Rozwiązanie

$\bar{z} = 2 - 3i$, $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$, stąd $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{2}{13}$.

2. Liczbę $z = 1 - i\sqrt{3}$ przedstawić w postaci trygonometrycznej.

Rozwiązanie

$$a = 1, \quad b = -\sqrt{3}, \quad |z| = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2 \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 2\pi - \alpha,$$

$$\cos\varphi = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi,$$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

3. Obliczyć $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{60}$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru de Moivre'a
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin \varphi.$

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{60} = \left[2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right]^{60} = 2^{60}\left(\cos 60\cdot\frac{5}{3}\pi + i\sin 60\cdot\frac{5}{3}\pi\right) =$$

$$2^{60}(\cos 100\pi + i\sin 100\pi) = 2^{60}(\cos 50\cdot 2\pi + i\sin 50\cdot 2\pi) = 2^{60}(1 + 0\cdot i) = 2^{60}.$$

4. Obliczyć $\sqrt[3]{-i}$ **.**

Rozwiązanie

Liczbę $z=-i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej: $-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$.

$$w_k=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

$w_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\qquad w_1=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$w_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

5. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równania kwadratowe

a) $z^2+2z+2=0$; b) $z^2-3z+3+i=0$

Rozwiązanie

a) $\Delta=4-8=-4$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-4}=\sqrt{i^2 4}=\begin{cases}-2i,\\ 2i.\end{cases}$

$z_1=\frac{-2-2i}{2}=-1-i$, $z_2=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$.

b) $\Delta=3^2-4(3+i)=-3-4i$

Wyróżnik $\Delta=(-3)^2-4(3+i)=-3-4i$.

$\sqrt{\Delta}$ wyznaczamy korzystając z definicji pierwiastka stopnia drugiego ($\sqrt{\Delta}=\omega\Leftrightarrow\Delta=\omega^2$)

Niech $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-3-4i}=x+yi\ (x,y\in R)$. Wówczas $-3-4i=(x+yi)^2$,

$-3-4i=x^2-y^2+2xyi$,

stąd otrzymuję układ równań

$$\begin{cases}x^2-y^2=-3\\ 2xy=-4.\end{cases}$$

Wyznaczamy $y=-\frac{2}{x}$ z drugiego równania $(x\neq 0)$ i podstawiamy do pierwszego równania, otrzymujemy równanie dwukwadratowe $x^4+3x^2-4=0$.

Podstawiamy $x^2=t$ i mamy równanie $t^2+3t-4=0$, którego rozwiązania pierwiastkami są $t_1=-4$ oraz $t_2=1$.

Stąd mamy $x^2=-1$ (równanie sprzeczne w zbiorze R) oraz $x^2=1$, więc $x_1=1$ lub $x_2=-1$, $y_1=-2$, $y_2=2$.

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-3-4i}=\begin{cases}1-2i,\\ -1+2i.\end{cases}$ Ostatecznie $z_1=\frac{3+1-2i}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-i$,
$z_2=\frac{3-1+2i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

Zadania

1. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez pomocy tablic) następujące liczby zespolone:
a) -1; b) $-i$; c) $-1-i$; d) $-1-i\sqrt{3}$.

2. Obliczyć pierwiastki trzeciego stopnia z następujących liczb zespolonych:
a) $-i$; b) -1; c) $1+i\sqrt{3}$.

3. Rozwiązać równania kwadratowe:
a) $z^2+(2+2i)z+3-2i=0$; b) $z^2+(1+4i)z-5-i=0$; c) $z^2+2iz+i-1=0$.

Odpowiedzi

1. a) $\cos\pi+i\sin\pi$; b) $\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$; c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$; d) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

2. a) $\frac{1}{2}i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; b) $-1,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
c) $\sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{6k+1}{9}\pi+i\sin\frac{6k+1}{9}\pi\right],k=0,1,2.$

3. a) $i,-2-3i$; b) $1-i,-2-3i$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}i,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}+2}{2}i$.

Lp.	**Literatura**	**Rozdział**
1	Zbiór zadań z matematyki pod red. R. Krupińskiego. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	I § 1
2	Winnicki K., Landowski M.; Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów AM w Szczecinie	II § 21-27
3	Lassak. M. Matematyka dla studiów technicznych. Supremum, 2006.	XXIV A, B