Pochodna funkcji jednej zmiennej

Pochodna funkcji w punkcie x_0 oznacza szybkość zmiany wartości funkcji w punkcie x_0.

Oznaczamy ją symbolami:

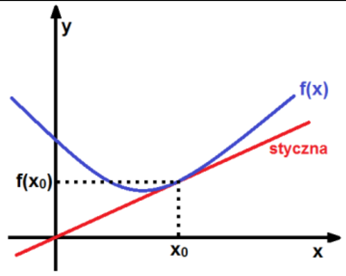
$f'(x_0)$ lub $y'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$ lub $\frac{dy}{dx}(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Geometrycznie, pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie x_0.

Równanie stycznej ma wtedy postać:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Reguły różniczkowania:

1) $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$

2) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

3) $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$

4) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, gdzie $g(x) \neq 0$

6) $\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Pochodne funkcji elementarnych:

Funkcja	Pochodna
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

Różniczkę funkcji $y=f(x)$ definiuje się jako wyrażenie postaci: $\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$

Pochodna funkcji dwóch zmiennych

Dla funkcji dwóch zmiennych $z=f(x, y)$ definiuje się pochodne cząstkowe względem zmiennej x oraz względem zmiennej y.

Pochodna cząstkowa funkcji $z=f(x, y)$ w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$ względem zmiennej x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Oznaczamy ją symbolami:

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ bądź $f'_x(x_0, y_0)$

Pochodna cząstkowa funkcji $z=f(x, y)$ w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$ względem zmiennej y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Oznaczamy ją symbolami:

$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ bądź $f'_y(x_0, y_0)$

W praktyce pochodne cząstkowe obliczamy tak samo jak dla funkcji jednej zmiennej, przy czym drugą zmienną traktujemy jak stałą.

Różniczką zupełną funkcji $z=f(x, y)$ w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$ nazywamy wyrażenie:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

gdzie dx oraz dy to różniczki zmiennych x i y.