Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkę postaci $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdzie R jest funkcją wymierną zmiennych $\sin x, \cos x$ możemy zawsze sprowadzić do całki funkcji wymiernej stosując podstawienie (uniwersalne)

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$$

Wówczas $\sin x, \cos x, dx$ są funkcjami wymiernymi zmiennej t

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Przypadki szczególne

1. Jeżeli $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$), podstawiamy: $\cos x = t$.

2. Jeżeli $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\cos x$), podstawiamy: $\sin x = t$.

3. Jeżeli $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$ i $\cos x$ jednocześnie), podstawiamy: $\operatorname{tg} x = t$.

Wzory rekurencyjne

$$J_n = \int \sin^n x \, dx = \frac{1}{n}\left(-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right) + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

$n \in N$ (wzór stosowany zasadniczo dla *n* parzystych)

$$J_n = \int \mathrm{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x - J_{n-2} .$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów.
Jeżeli $F_n(x), G_m(x)$ są wielomianami stopnia *n* i *m*, gdzie $n < m$ wówczas funkcję $\frac{F_n(x)}{G_m(x)}$ nazywamy funkcją wymierną właściwą, jeżeli natomiast $n \geq m$, to funkcję tę nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą.

Funkcję wymierną niewłaściwą przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{F_n(x)}{G_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{G_m(x)} \qquad (k < m)$$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na sumę ułamków prostych, tzn. funkcji wymiernych postaci:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad \frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n \in N \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Całkowania ułamków prostych

1. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \cdot \ln|x-a| + C$$,

2. $$\int \frac{A_n\,dx}{(x-a)^n} = \frac{A_n}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \qquad n > 1$$

3. $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ funkcję podcałkową przedstawiamy w postaci

$$\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{A\cdot b}{2}\right)\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

stosując podstawienia $x + \frac{b}{2a} = t$ sprowadzamy tę całkę do całki postaci

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C.$$

4. $$\int \frac{\left(A_n x + B_n\right)dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}, \ \ n \in N, \ \ n > 1$$

Daną całkę przedstawiamy w postaci sumy całek:

$$\int \frac{\left(A_n x + B_n\right)dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n} = \frac{A_n}{2}\int \frac{\left(2ax + b\right)dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n} + \left(B - \frac{A \cdot b}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + C\right)^n}$$

Całkę pierwszą obliczamy stosując podstawienie $ax^2+bx+c=t,$ natomiast drugą całkę sprowadzamy do całki postaci $J_n=\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}$, przez sprowadzenie funkcji ax^2+bx+c do postaci kanonicznej (analogicznie jak w p. 3.).

Całkę J_n możemy obliczyć stosując np. podstawienia trygonometryczne $t=\operatorname{ctg} u$.

Całkowanie funkcji niewymiernych

Poniższe wzory dotyczą funkcji typu $R(u,\ v)$ co oznacza funkcję wymierną zmiennych u, v.

1. $$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad\qquad ad-bc\neq 0$$

Podstawienie (sprowadzamy całkę do całki funkcji wymiernej)

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Podstawienia Eulera (na ogół nieefektywne, prowadzące do skomplikowanych całek funkcji wymiernych)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \sqrt{a}\, x \pm t, & a>0 \\ xt+\sqrt{c}, & c>0 \\ t\left(x-x_1\right), & \Delta>0 \end{cases}$$

x_1 – jeden z pierwiastków trójmianu ax^2+bx+c.

Przypadki szczególne

3. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ Podstawienie $\sqrt{f(x)} = t$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Sprowadzamy trójmian $ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej i otrzymujemy całki typu:

$\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{|\alpha|} + C$ lub $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + k}\right| + C$.

5. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Podstawiamy $x-\alpha=\frac{1}{t}$

6.Metoda współczynników nieoznaczonych

$$\int \frac{\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Współczynniki $b_i\left(i=0,1,\ldots,n-1\right), \lambda$ znajdujemy po zróżniczkowaniu obu stron i porównaniu współczynników przy odpowiednich potęgach *x*.

Podstawienia trygonometryczne

7. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \qquad x = a \sin t$

8. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx \qquad x = a \operatorname{tg} t$

9. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx \qquad x = \dfrac{a}{\cos t}$