Całka podwójna

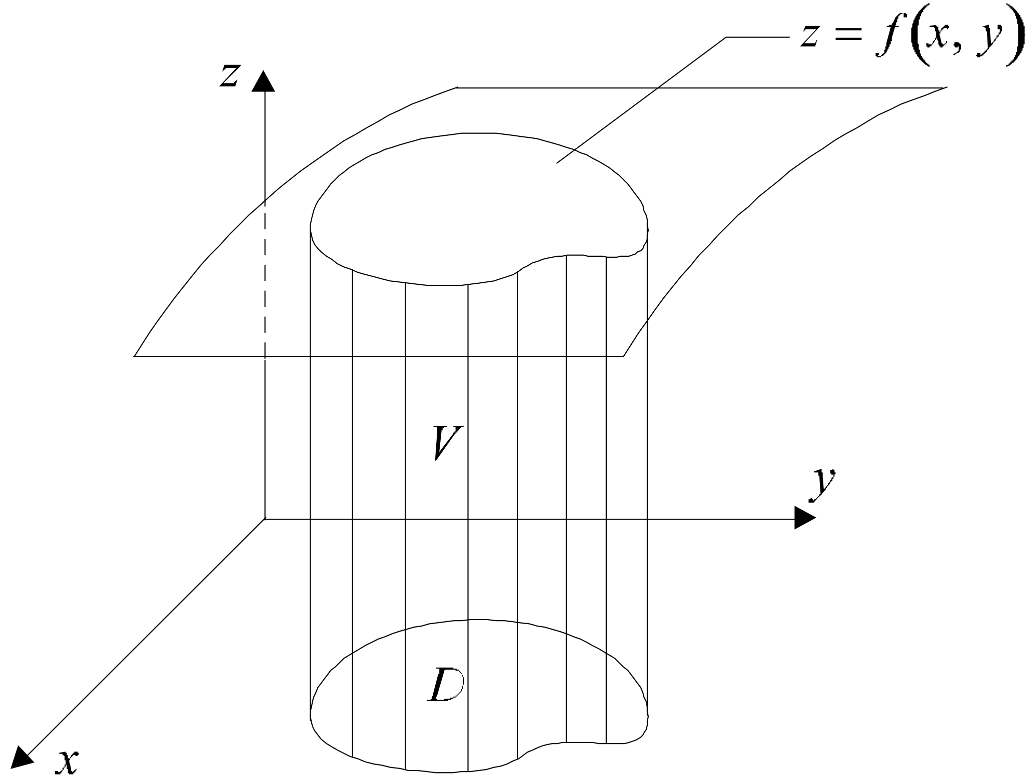
Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów obszaru $\overline{D}$ ciąg sum całkowych (S_n) jest zbliżony do tej samej granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów P_i, to granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji $f(x,y)$ w obszarze $\overline{D}$ i oznaczamy symbolem

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \quad \text{lub} \quad \iint_D f(x, y)dxdy,$$

czyli

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

Interpretacja geometryczna



Zamiana całki podwójnej na całkę iterowaną

Obszar domknięty $\overline{D}_x$ opisany nierównościami $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, gdzie φ, ψ są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle a, b\rangle$ nazywamy obszarem normalnym względem osi 0*X*. Analogicznie obszar domknięty $\overline{D}_y$ opisany nierównościami $c \le y \le d$, $\lambda(y) \le x \le \mu(y)$, gdzie λ, μ są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle c, d\rangle$ nazywamy obszarem normalnym względem osi 0*Y*. Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze $\overline{D}_x, (\overline{D}_y)$, to

$$\iint_{D_x} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

$$\iint_{D_y} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\lambda(x)}^{\mu(x)} f(x, y)dx \right] dy$$

Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Niech funkcje $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ \varphi, \psi \in C^1(\Delta)$ określają wzajemnie jednoznacznie odwzorowanie τ wnętrza obszaru regularnego Δ na wnętrze obszaru regularnego D.

Wyznacznik funkcyjny:

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nazywamy jakobianem odwzorowania τ.

Niech $J(u, v) \neq 0$ w obszarze Δ (wówczas τ jest w tym obszarze wzajemnie jednoznaczne). Zakładamy ponadto, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła i ograniczona w obszarze regularnym *D*.

Wówczas

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Delta f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|J(u, v)|\,dudv$$

Całka potrójna

$$\iiint_V f(x, y, z)dV \qquad \text{lub} \qquad \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

Przestrzenny obszar domknięty $\overline{V}_x$ określony nierównościami

$$a \le x \le b\,,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\,,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)$$

gdzie α, β są funkcjami ciągłymi dla $x \in \langle a, b\rangle$ oraz φ, ψ są funkcjami ciągłymi w obszarze $\overline{D}$ opisanym dwiema pierwszymi nierównościami, nazywamy obszarem normalnym względem płaszczyzny *OXY.*
Analogicznie określamy obszary normalne względem płaszczyzn 0*XZ*, 0*YZ*.
Jeżeli funkcja $u = f(x, y, z)$ jest ciągła w obszarze $\overline{V}_x$, to

$$\iiint\limits_{V_x} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx$$

Całka krzywoliniowa nieskierowana

Niech funkcja $z = f(x, y)$ będzie określona na krzywej regularnej $\Gamma: x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Przedział $\langle \alpha, \beta \rangle$ dzielimy na *n* podprzedziałów $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Wówczas długość Δs_i *i*-tego łuku częściowego krzywej Γ

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

Wybieramy punkty pośrednie $\xi_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$ oraz tworzymy sumę σ_n :

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$, gdzie $x_i = \varphi(\xi_i),\ y_i = \psi(\xi_i)$

Jeżeli ciąg (σ_n) jest zbieżny do tej samej granicy, dla każdego ciągu podziałów krzywej Γ, niezależnie od wyboru punktów ξ_i, to granicę tę nazywamy **całką krzywoliniową nieskierowaną** (pierwszego rodzaju) po krzywej Γ i oznaczamy symbolem $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)ds$

tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds$$

Związek między całką krzywoliniową a całką oznaczoną

1. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej regularnej

$\Gamma: x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$ wówczas

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

2. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej

$\Gamma\colon y = g(x),\ g(x) \in C^1(\langle a, b\rangle),$ wówczas

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds = \int\limits_a^b f[x, g(x)] \cdot \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

Całki krzywoliniowe skierowane

Zakładamy, że dany jest otwarty łuk zwykły skierowany *L* o przedstawieniu parametrycznym $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ zgodnym z kierunkiem tego łuku. Ponadto dane są funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ określone w każdym punkcie łuku *L*. Analogicznie jak całkę oznaczoną definiujemy **całkę krzywoliniową skierowaną** pary funkcji $[P(x, y); Q(x, y)]$ po łuku *L* i oznaczamy symbolem

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Zamiana całki krzywoliniowej skierowanej na całkę oznaczoną.
Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe na łuku *L* spełniającym podane założenia, wówczas całka krzywoliniowa istnieje oraz

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

Całkę krzywoliniową po krzywej zamkniętej Jordana Γ skierowanej dodatnio (ujemnie) względem swego wnętrza oznaczamy (odpowiednio)

$$\oint_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{lub} \quad \oint_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Twierdzenie (wzór) Greena

Jeżeli funkcje $P(x,y), Q(x,y) \in C^1$ w obszarze normalnym $\overline{D}$ (względem osi 0*x*, 0*y*) oraz brzeg Γ jest skierowany dodatnio względem wnętrza obszaru, wówczas

$$\oint_{\Gamma} P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$