Zadania 2 dla Geoinformatyki

1. Wyznaczyć parametryzację krzywej r(t), której wykresem jest okrąg $x^2 + y^2 = 1$, tak aby punkt $r(t)$ przebiegał dookoła okręgu w kierunku ruchu wskazówek zegara i r(0) = (0, 1).
2. Wyznaczyć parametryzację krzywej r(t), której wykresem jest okrąg o środku w punkcie (0, 3) i promieniu 3, gdzie parametrem t jest kąt nachylenia siecznej okręgu przechodzącej przez punkt (0, 0) do osi Ox.
3. Wykazać, ze poniższe parametryzacje są równoważne oraz narysować krzywą, którą opisują:
   $r(t)=[3\cos t, 5\sin t]$ dla $t\in\langle 0, 2\pi\rangle$ oraz $\rho(u)=\left[\frac{3-3u^2}{1+u^2}, \frac{10u}{1+u^2}\right]$ dla $u\in R$
4. Sprawdzić, czy poniższe parametryzacje są równoważne oraz narysować krzywą, którą opisują:
   $r(t)=[2\operatorname{ctg}^2 t, -3\operatorname{ctg}^2 t]$ dla $t\in\langle \pi/2, \pi\rangle$ oraz $\rho(u)=[2u, -3u]$ dla $u\in R$.
5. Niech $r(s)=\left[\left(1-\frac{2s}{5}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{2s}{5}\right)^{\frac{3}{2}}, 1-\frac{4s}{5}\right]$ dla $s\in(0, 5/2)$. Pokazać, ze krzywa ta jest sparametryzowana naturalnie.
6. Pokazać, ze krzywa $r(s)=\left[\frac{4}{5}\cos s, 1-\sin s, -\frac{3}{5}\cos s\right]$ jest sparametryzowana naturalnie. Wyznaczyć wektory repera Freneta.
7. Znaleźć równania prostej stycznej i prostej normalnej do krzywej o równaniu $y = \sin x$ w punkcie (0, 0) (wykonać rysunek).
8. Znaleźć równania prostej stycznej i prostej normalnej do krzywej o równaniu $y = x^3 - 2x^2$ w punkcie (1, -1) (wykonać rysunek).
9. Znaleźć równania prostej stycznej i prostej normalnej do krzywej o równaniu $r(t)=[3\cos t, 5\sin t]$ w punkcie $t=\pi/2$ (wykonać rysunek).
10. Znaleźć równanie prostej stycznej i płaszczyzny normalnej do krzywej $r(t)=[t^2, \cos t, t]$ w punkcie $t=\pi/4$
11. Znaleźć równanie prostej stycznej i płaszczyzny normalnej do krzywej $r(t)=[t-\sin t, 1-\cos t, 4\sin\frac{t}{2}]$ w punkcie $t=\pi/2$
12. Znaleźć równanie parametryczne okręgu wielkiego sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przechodzącego przez punkty (0, 0, 1), (1,2 ,1)
13. Znaleźć kąty, pod którymi przecinają się krzywe: $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.
14. Znaleźć kąty, pod którymi przecinają się krzywe: $x^2 + y^2 = 8x$, $y^2(2 - x) = x^3$.
15. Znaleźć równanie stycznej i normalnej do krzywej: $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 + 1$ w punkcie $t = 2$.
16. Znaleźć równanie płaszczyzny normalnej do krzywej $r = [2 \cos(t), 2 \sin(t), 4t]$ w punkcie $t = 0$.
17. Znaleźć kąt, jaki tworzy z osią Oz styczna do krzywej $r(t)=[t-\sin t, 1-\cos t, 4\sin\frac{t}{2}]$ w punkcie $t=\pi/2$
18. W jakich punktach styczna do krzywej $r(t)=[3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3]$ jest równoległa do płaszczyzny $3x+y+z+2=0$?
19. Wykazać, że krzywa o równaniu: $r(t)=\left[t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right]$ jest krzywą płaską i znaleźć równanie płaszczyzny, w której jest zawarta.
20. Wykazać, że krzywa o równaniu: $r(t)=\left[\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{t}{1+t}\right]$ jest krzywą płaską i znaleźć równanie płaszczyzny, w której jest zawarta.
21. Wykazać, że krzywa o równaniu: $r(t)=[1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2]$ jest krzywą płaską i znaleźć równanie płaszczyzny, w której jest zawarta.
22. Wyznaczyć funkcje f(t) taka, aby krzywa $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = f(t)$ była krzywą płaską.
23. Wyznaczyć wektory repera Freneta, krzywiznę i skręcenie krzywej: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$
24. Wyznaczyć wektory repera Freneta, krzywiznę i skręcenie krzywej: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos (t/2)$
25. Wyznaczyć wektory repera Freneta, krzywiznę i skręcenie krzywej: $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, gdzie $abc \neq 0$
26. W jakich punktach krzywizna krzywej: $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $z(t) = \cos 2t$ osiąga wartość najmniejszą?
27. Znaleźć krzywiznę krzywej: $y = \ln x$ w punkcie (1, 0).
28. Znaleźć krzywiznę krzywej: $x^3 + y^3 = 3xy$ w punkcie (3, 2, 3).

29. Znaleźć krzywiznę w dowolnym punkcie krzywej: $y = \sin(x)$.
30. Znaleźć krzywiznę w dowolnym punkcie krzywej: $y^2 = 2px$.
31. Znaleźć krzywiznę w dowolnym punkcie krzywej: $x = t^2$, $y = t^3$.
32. Znaleźć krzywiznę w dowolnym punkcie krzywej: $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, gdzie $a>0$.
33. Znaleźć równanie płaszczyzny ściśle stycznej spirali stożkowej $r = [t\cos(t), -t\sin(t), 3t]$ w punkcie $t = 0$.
34. Znaleźć równanie płaszczyzny ściśle stycznej krzywej $r = [a\cos(t), b\sin(t), e^t]$ w punkcie $t = 0$.
35. Znaleźć równanie normalnej głównej i binormalnej krzywej: $r = [t, t^2, t^3]$ w punkcie $t = 1$.
36. Znaleźć równanie normalnej głównej i binormalnej krzywej: $r(t) = [t^2 - 3, \cos t, 1 - 2t]$ w punkcie $t = 0$.