KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

AKADEMIA MORSKA SZCZECIN

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SKRYPT DO ZAJĘĆ WYRÓWNAWCZYCH Z MATEMATYKI

DLA STUDENTÓW I ROKU AKADEMII MORSKIEJ

W SZCZECINIE

dr inż. Ryszard Krupiński

PUBLIKACJA DYSTRYBUOWANA BEZPŁATNIE

Spis treści

I. Wstęp

Niniejszy podręcznik jest przeznaczony dla studentów I roku Akademii Morskiej w Szczecinie, uczestniczących w zajęciach wyrównawczych z matematyki, w ramach projektu „Rozwój i promocja kierunków technicznych w Akademii Morskiej w Szczecinie". W skrypcie przedstawiono podstawowe zagadnienia z matematyki z zakresu szkoły średniej, których znajomość jest niezbędna do realizacji programu matematyki, fizyki i różnych przedmiotów technicznych na I i II roku studiów. Liczne przykłady i komentarze do rozwiązanych zadań, umożliwią studentom szybsze opanowanie prezentowanych zagadnień. W celu utrwalenia poznanego materiału, do każdego rozdziału dołączono dużą liczbę zróżnicowanych zadań do samodzielnego rozwiązania. Wiele z nich to zadania bardzo proste, ilustrujące prezentowane pojęcia. Do większości z nich podano odpowiedzi.

II. Symbole matematyczne

Matematyka posiada swój specyficzny język, składający się z obszernego zestawu znaków, symboli i sformułowań. Niektóre z nich będą często wykorzystywane w niniejszym skrypcie i na zajęciach podczas studiów. Dlatego poniżej wyjaśniamy znaczenie najczęściej używanych symboli.

Symbol przynależności: $\in$. Zapis „$x \in A$" oznacza, że x jest elementem zbioru A, a wyrażenie „$x \notin A$" oznacza, że x nie jest elementem zbioru A.

Zapis „$A \subset B$" oznacza, że zbiór A zawiera się w zbiorze B.

Zapis „$A \cup B$" oznacza sumę zbiorów A i B (złączenie).

Zapis „$A \cap B$" oznacza iloczyn zbiorów A i B (część wspólną).

Zapis „$A \setminus B$" oznacza różnicę zbiorów A i B (te elementy, które są w A, ale nie ma ich w B).

Symbol $\bigwedge_{x \in A}$ nazywamy kwantyfikatorem ogólnym, jest on równoważny wyrażeniu *„dla każdego x należącego do A"*. Natomiast symbol $\bigvee_{x \in A}$ oznaczający *„istnieje taki x należący do A "*, nazywamy kwantyfikatorem szczególnym.

Wyrażenie *„z tego wynika, że"* można zastąpić symbolem $\Rightarrow$;

Wyrażenie *„wtedy i tylko wtedy, gdy"* można zastąpić symbolem $\Leftrightarrow$;

Spójnik *„i"* często w tekstach matematycznych ma postać $\wedge$, a spójnik *„lub"* występuje jako $\vee$.

III. Liczby rzeczywiste

Pierwszą rzeczą, która kojarzy się z matematyką są liczby. Dlatego zaczniemy od opisu i klasyfikacji liczb, z którymi spotyka się każdy człowiek, czy to w życiu codziennym czy przy rozwiązywaniu złożonych problemów technicznych. W niniejszym skrypcie, tak jak w szkole średniej, będziemy poruszać się tylko w zakresie liczb rzeczywistych. Nazwa tych liczb oznacza, że spotykamy się z nimi w naszej rzeczywistości czyli w domu, w sklepie, w banku, na plaży, w parku i t.d. Liczby te w większości były znane i stosowane już w starożytności.

Jak mówimy o liczbach, to jednocześnie trzeba wspomnieć o tym, co z tymi liczbami można zrobić czyli o działaniach. Wyróżniamy dwa podstawowe działania: dodawanie i mnożenie. Często w szkole mówiło się o czterech podstawowych działaniach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, jednak w niniejszym skrypcie odejmowanie będziemy traktować jako dodawanie liczby przeciwnej, a dzielenie jako mnożenie przez liczbę odwrotną. Pojęcie liczby przeciwnej i liczby odwrotnej wyjaśnimy później. Dodatkowo w tej części omówimy jeszcze potęgowanie i pierwiastkowanie.

Liczby naturalne

Tak zwany „zwykły człowiek" najczęściej stosuje liczby naturalne czyli liczby 1, 2, 3, 4, 5 i tak dalej. Są to liczby, które pojawiły się w historii ludzkości jako pierwsze. Liczby naturalne oznaczamy symbolem ***N.*** Dodając lub mnożąc dwie liczby naturalne otrzymamy również liczbę naturalną. Natomiast odejmowanie dwóch liczb naturalnych nie zawsze da liczbę naturalną. Pojawiają się w ten sposób liczby ujemne.

Liczby całkowite

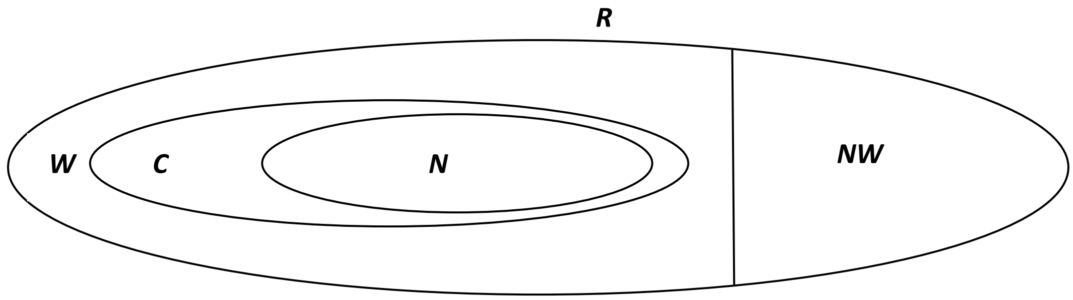
Uzupełniając liczby naturalne o liczbę 0 i liczby przeciwne do liczb naturalnych (-1, -2, -3, -4, i t.d.) otrzymujemy liczby całkowite. Liczby całkowite oznaczamy symbolem ***C.*** Dodając , mnożąc lub odejmując dwie liczby całkowite otrzymamy również liczbę całkowitą. Natomiast dzielenie dwóch liczb całkowitych nie zawsze da liczbę całkowitą. Pojawiają się wtedy ułamki.

Liczby wymierne

Liczby wymierne to wszystkie liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie liczby *p* i *q* są liczbami całkowitymi i *q* nie może być zerem. Liczby wymierne oznaczamy symbolem ***W***. Dodając , mnożąc, odejmując lub dzieląc dwie liczby wymierne otrzymamy również liczbę wymierną (z zastrzeżeniem, że nie wolno dzielić przez 0). Natomiast operacja pierwiastkowania (w starożytności znana w postaci obliczania długości przekątnej kwadratu) wykonana na liczbie wymiernej, nie zawsze daje liczbę wymierną. Pojawiają się w ten sposób liczby niewymierne.

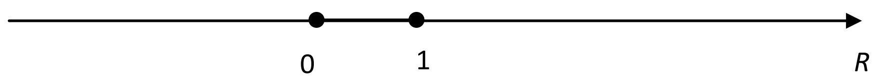
Liczby niewymierne

Liczby niewymierne to te liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Do liczb niewymiernych zaliczamy wszystkie pierwiastki z liczb wymiernych, które nie są wymierne, np.: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[7]{5}$ i t.p. oraz niektóre liczby specjalne, jak na przykład liczba π używana często w geometrii czy liczba *e* używana w analizie matematycznej. Liczby niewymierne oznaczamy symbolem ***NW***.
Liczby wymierne i niewymierne dają w sumie liczby rzeczywiste. Poniższy rysunek pokazuje zależności między poszczególnymi zbiorami liczb.



Rys. 1. Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór liczb rzeczywistych można przedstawić graficznie jako prostą zorientowaną, na której zaznaczony jest zwrot, konkretna wartość oraz jednostka. Każdy punkt na tej prostej odpowiada jakiejś liczbie rzeczywistej.



Rys. 2.Oś liczbowa

Przedziały liczbowe

Z osią liczbową związane są bezpośrednio przedziały liczbowe czyli zbiory liczb pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi. Zbiór liczb rzeczywistych zawartych między liczbami *a* i *b*, włącznie z tymi liczbami nazywamy przedziałem domkniętym i oznaczamy symbolem $\langle a, b\rangle$. Definicję tego przedziału można również zapisać w skróconej „matematycznej” wersji:

$$\langle a, b\rangle = \{x \in R : x \geq a \wedge x \leq b\}$$

Natomiast przedziałem otwartym nazywamy zbiór:

$$(a, b) = \{x \in R : x > a \wedge x < b\}$$

Przedziałem jednostronnie domkniętym nazywamy zbiór:

$(a,b\rangle = \{x \in R : x > a \wedge x \leq b\}$ lub $\langle a,b) = \{x \in R : x \geq a \wedge x < b\}$

Przedziałem nieograniczonym nazywamy zbiór:

$(-\infty, a\rangle = \{x \in R : x \leq a\}$ lub $(-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$ lub $(a,\infty) = \{x \in R : x > a\}$ lub $\langle a, \infty) = \{x \in R : x \geq a\}$

Działania na liczbach rzeczywistych

Dodawanie

Dodawanie liczb rzeczywistych jest:

- przemienne czyli *a + b = b + a*;

- łączne czyli $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

Powyższe własności przydają się szczególnie wtedy, gdy trzeba szybko obliczyć sumę kilku lub kilkunastu liczb, np.:

$$12+25+48+31+15+19=(12+48)+(25+15)+(31+19)=60+40+50=150$$

Liczbą przeciwną do liczby a jest taka liczba, która po dodaniu do liczby a daje 0. Liczbę przeciwną do liczby a oznaczamy symbolem: $-a$ (minus a). Znak minus w tym wypadku nie musi oznaczać liczby ujemnej. Na przykład jeżeli $a = -3$, to $-a = 3$, oznacza to, że liczbą przeciwną do liczby -3 jest liczba 3.

Mnożenie

Mnożenie liczb rzeczywistych jest:

- przemienne czyli $a \cdot b = b \cdot a$;
- łączne czyli $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- rozdzielne względem dodawania czyli $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ostatnia własność wykorzystywana w odwrotnej kolejności czyli $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ nosi nazwę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias. Jest to operacja, która pozwala uzyskać postać iloczynową danego wyrażenia.

PRZYKŁADY

1) $2x-xy=x(2-y)$
2) $4x^2-2x=2x\cdot 2x-2x\cdot 1=2x(2x-1)$
3) $x^2y^3+3xy^2-2x^3y^4=xy^2\left(xy+3-2x^2y^2\right)$

Liczbą odwrotną do liczby a jest taka liczba, która po pomnożeniu przez liczbę a daje 1. Liczbę odwrotną do liczby a oznaczamy symbolem: a^{-1} lub $\frac{1}{a}$

PRZYKŁADY

1) $a=3\Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{3}$, bo $3\cdot\frac{1}{3}=1$
2) $a=\frac{3}{5}\Rightarrow a^{-1}=\frac{5}{3}$, bo $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=1$
3) $a=-\frac{1}{4}\Rightarrow a^{-1}=-4$, bo $-\frac{1}{4}\cdot(-4)=1$

Potęgowanie i pierwiastkowanie

Potęgowanie pojawiło się jako skrócona wersja wielokrotnego mnożenia. Zamiast pisać $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5$ przyjęło się zapisywać ten iloczyn jako 5^4. Dlatego iloczyn n czynników $a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a$ nazywamy n-tą potęgą liczby a i oznaczamy symbolem a^n. Liczbę a nazywamy podstawą potęgi, a liczbę n wykładnikiem potęgi. Z czasem pojęcie potęgi o wykładniku naturalnym uogólniono najpierw na potęgę o wykładniku całkowitym, a następnie o wykładniku wymiernym.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym oznacza odwrotność potęgi o wykładniku naturalnym czyli

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

PRZYKŁADY

1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{7}$

3) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Dla dowolnego *n* naturalnego, potęga o wykładniku $\frac{1}{n}$ oznacza pierwiastek *n* – tego stopnia z liczby *a*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

A pierwiastkiem *n*-tego stopnia z nieujemnej liczby *a* nazywamy taką liczbę nieujemną *b,* że $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

PRZYKŁADY

1) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

2) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$, bo $8^2 = 64$

3) $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$, bo $5^4 = 625$

Własności działań na potęgach i pierwiastkach

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych *a* i *b* prawdziwe są następujące zależności:

$$a^0 = 1 \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Bezpośrednio z tych własności wynika sposób obliczania potęg o wykładnikach wymiernych:

$$a^{\frac{k}{n}} = a^{k\cdot\frac{1}{n}} = \left(a^k\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad \text{lub} \qquad a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot k} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

PRZYKŁADY

1) $32^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = 2^2 = 4$

2) $125^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^4 = 5^4 = 625$

3) $81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$

Jako, że pierwiastki to szczególne potęgi, odnoszą się również do nich własności działań na potęgach, które można przedstawić w następujący sposób:

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k\cdot n]{a}$$

PRZYKŁADY

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 6} = \sqrt{4} = 2$

2) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

3) $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

4) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot 2} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\cdot\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

5) $\sqrt{450} = \sqrt{9\cdot 50} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{50} = 3\sqrt{50} = 3\sqrt{25\cdot 2} = 3\cdot 5\cdot\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

Ułamki

Oddzielnym problemem są działania na ułamkach, z którymi niestety nawet absolwenci szkół średnich mają kłopoty.

Skracanie i rozszerzanie

Wartość ułamka nie zmieni się, gdy licznik i mianownik pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę. Na przykład:

1) $\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 4} = \frac{4}{8}$
2) $\frac{11}{7} = \frac{11\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{55}{35}$

3) $\frac{10}{25}=\frac{10:5}{25:5}=\frac{2}{5}$

4) $\frac{ac}{bc}=\frac{ac:c}{bc:c}=\frac{a}{b}$

Skracaniem ułamków nazywamy operację dzielenia licznika i mianownika przez tę samą liczbę. Natomiast rozszerzaniem nazywamy operację mnożenia licznika i mianownika przez tę samą liczbę.

Dodawanie

Żeby dodać dwa ułamki musimy mieć wspólny mianownik.

PRZYKŁADY

1) Żeby dodać $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{6}$, pierwszy ułamek rozszerzamy przez 3, a drugi rozszerzamy przez 2 czyli

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$$

2) Żeby dodać $\frac{a}{xy}$ i $\frac{b}{x^2}$, pierwszy ułamek rozszerzamy przez *x*, a drugi rozszerzamy przez *y* czyli

$$\frac{a}{xy}+\frac{b}{x^2}=\frac{a\cdot x}{xy\cdot x}+\frac{b\cdot y}{x^2\cdot y}=\frac{ax}{x^2y}+\frac{by}{x^2y}=\frac{ax+by}{x^2y}$$

3) Żeby dodać $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, pierwszy ułamek rozszerzamy przez *d*, a drugi rozszerzamy przez *b* czyli

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Mnożenie

Żeby pomnożyć dwa ułamki mnożymy liczniki i mianowniki poszczególnych ułamków.

PRZYKŁADY

1) $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{5}{24}$

2) $\frac{a}{y}\cdot\frac{b}{x}=\frac{a\cdot b}{y\cdot x}=\frac{ab}{xy}$

3) $2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{4}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{7\cdot 9}{3\cdot 5}=\frac{63}{15}=4\frac{3}{15}=4\frac{1}{5}$

Dzielenie

Żeby podzielić dwa ułamki mnożymy pierwszy przez odwrotność drugiego.

PRZYKŁADY

1) $\frac{1}{4}:\frac{5}{6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

2) $\frac{a}{y}:\frac{b}{x}=\frac{a}{y}\cdot\frac{x}{b}=\frac{ax}{by}$

3) $2\frac{1}{3}:1\frac{4}{5}=\frac{7}{3}:\frac{9}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{27}=1\frac{8}{27}$

Wartość bezwzględna

Wartością bezwzględną dowolnej liczby rzeczywistej nazywamy jej odległość od liczby 0. Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, a dla liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna. Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ dla } x\geq 0 \\ -x \text{ dla } x<0 \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *a* i *b* prawdziwe są następujące własności:

$|a|\geq 0$

$|-a|=|a|$

$|a+b|\leq|a|+|b|$

$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \, dla \ b\neq 0$

Nierówności zawierające wartość bezwzględną rozwiązujemy stosując jedną z poniższych równoważności:

$|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a,$

$|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a \vee x\geq a$

przy założeniu, że *a* > 0.

PRZYKŁADY

1) $|x|=5 \Rightarrow x=-5 \vee x=5$

2) $|3x-2|=5 \Rightarrow 3x-2=-5 \vee 3x-2=5 \Rightarrow x=-1 \vee x=\frac{7}{3}$

3) $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-5, 5)$

4) $|x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2 \vee x \ge 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle -2, \infty)$

ZADANIA

1. Podaj liczby przeciwne do następujących liczb: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = -1 + \sqrt{2}$, $d = \sqrt{5} - \sqrt{6}$
2. Podaj liczby odwrotne do następujących liczb: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = -1$, $d = \sqrt{5} - 2$
3. Doprowadź do najprostszej postaci następujące wyrażenia:
   a) $\frac{2+x}{x} - \frac{7-x}{x+1}$
   b) $\frac{x}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{4x^2 - x}{x^2 - 9}$
   c) $\frac{2}{y} - \frac{7-y}{x} + \frac{1}{y^2}$
   d) $\frac{1+x}{x} : \frac{1-x^2}{2x+1}$
4. Oblicz:
   a) $\frac{6^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-5}} \cdot 3^4 \cdot 2^3$
   b) $\frac{64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$
   c) $\frac{9^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}}{27^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{2}$
   d) $\frac{6^3 \cdot 4^2}{2^5} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-3}$
   e) $\left(\sqrt{8} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$
   f) $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1\right)$
   g) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \sqrt{3}$
   h) $\left(\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)$
5. Usuń niewymierność z mianownika
   a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{35}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$ d) $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$ e) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$
6. Wyłącz czynnik przed pierwiastek
   a) $\sqrt{48}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{128}$ d) $\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt[3]{24}$
7. Rozwiąż równania i nierówności
   a) $|-x - 2| = 7$
   b) $|x - 2| + |x| = 8$

c) $|4x-5|\leq 3$

d) $|-x+5|\geq 8$

e) $|2x-2|+|x+1|<2$

Odpowiedzi

1. $-a=\frac{1}{2}$, $-b=-\sqrt{3}$, $-c=1-\sqrt{2}$, $-d=-\sqrt{5}+\sqrt{6}$
2. $a^{-1}=2$, $b^{-1}=\sqrt{3}$, $c^{-1}=-1$, $d^{-1}=\sqrt{5}+2$
3. a) $\frac{2x^2-4x+2}{x^2+x}$, b) $\frac{6x^2-2x+3}{x^2-9}$, c) $\frac{y^3-7y^2+2xy+x}{xy^2}$, d) $\frac{-2x-1}{x^2-x}$
4. a) 6; b) 4; c) 2; d) $\frac{1}{6}$; e) 6; f) $-2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; g) 3; h) −8
5. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, b) $7\sqrt{5}$, c) $\sqrt{5}+1$, d) $\frac{3\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$
6. a) $4\sqrt{3}$, b) $2\sqrt{5}$, c) $8\sqrt{2}$, d) $3\sqrt[3]{2}$ e) $2\sqrt[3]{3}$
7. a) $x=-9 \vee x=5$, b) $x=-3 \vee x=5$, c) $x\in\left\langle \frac{1}{2}, 2\right\rangle$, d) $x\in\left(-\infty,-3\right\rangle\cup\left\langle 13,\infty\right)$ e) $x\in\varnothing$

IV. Funkcja

Definicja funkcji

Funkcją *f* określoną w zbiorze *X* o wartościach ze zbioru *Y* nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbiory *X* dokładnie jednego elementu ze zbioru *Y.*

Funkcję taką oznaczamy symbolem $f: X\to Y$.

Zbiór *X* nazywamy dziedziną funkcji (zbiór argumentów).

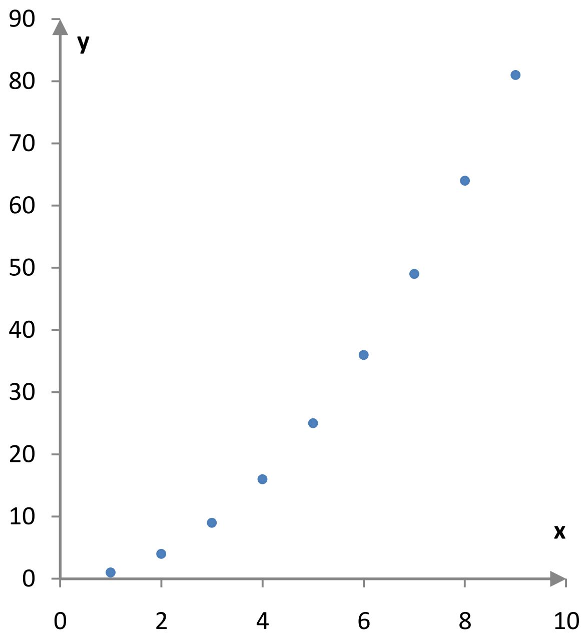
Zbiór *Y* nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Wykresem funkcji *y = f(x)* nazywamy zbiór *W* punktów płaszczyzny *Oxy* taki, że

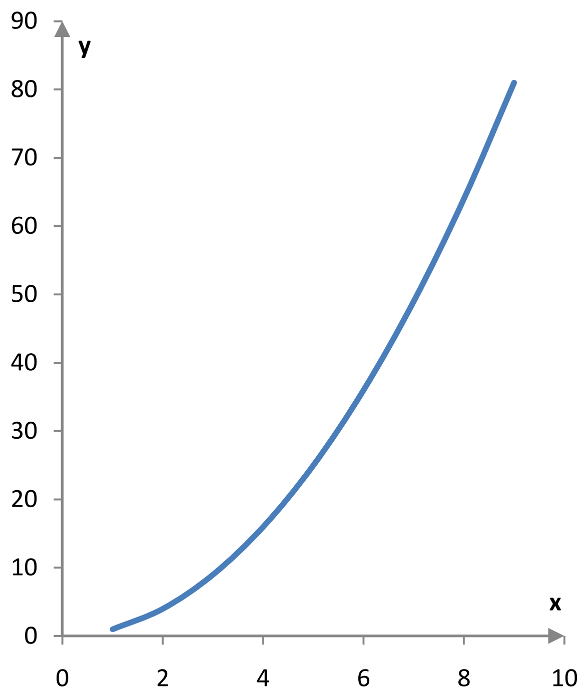
W = {*P(x, y): x* $\in$ *D, y = f(x)*}.

PRZYKŁADY

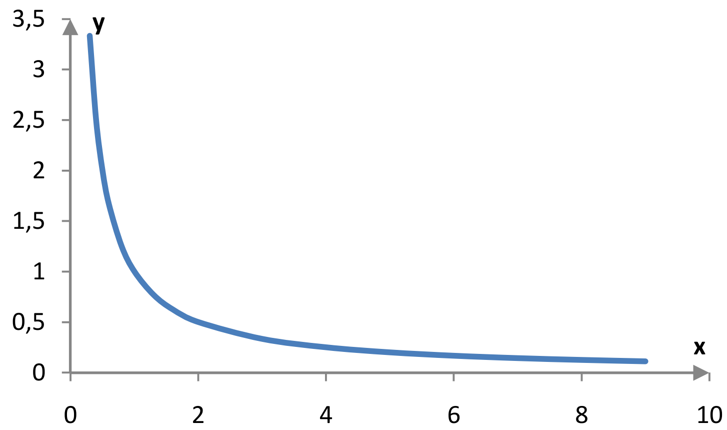
1) Niech funkcja f_1 każdej liczbie naturalnej mniejszej od 10, przyporządkowuje jej kwadrat. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, natomiast zbiorem wartości jest $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$. Wykresem tej funkcji jest 9 punktów na płaszczyźnie *Oxy*:



2) Niech funkcja f_2 każdej liczbie rzeczywistej z przedziału od 1 do 9, przyporządkowuje jej kwadrat. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 1, 9 \rangle$, natomiast zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, 81 \rangle$. Wykresem tej funkcji jest nieskończenie wiele punktów na płaszczyźnie Oxy, tworzących linę krzywą pomiędzy punktami (1, 1) i (9, 81):



3) Niech funkcja f_3 każdej liczbie rzeczywistej dodatniej przyporządkowuje jej odwrotność. Dziedziną tej funkcji jest zbiór R_+, zbiorem wartości jest ten sam zbiór R_+. Wykresem tej funkcji jest nieskończenie wiele punktów na płaszczyźnie Oxy, tworzących fragment linii krzywej zwanej hiperbolą:



Własności funkcji

Poniżej przedstawiono niektóre własności funkcji niezbędne do analizy wykresów, którą studenci muszą często wykonywać na różnych zajęciach. Poniższe własności są też potrzebne do zrozumienia nowych pojęć, które pojawią się na kursie matematyki podczas I i II roku studiów.

1) Funkcję *f* nazywamy różnowartościową w zbiorze *X* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch różnych argumentów, ich wartości są różne.

2) Funkcję *f* nazywamy parzystą w zbiorze *D* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$, element przeciwny do niego należy również do *D* oraz $f(-x) = f(x)$

(wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Oy)

3) Funkcję *f* nazywamy nieparzystą w zbiorze *D* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D$, element przeciwny do niego należy również do *D* oraz $f(-x) = -f(x)$

(wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych)

4) Funkcję *f* nazywamy okresową w zbiorze *D* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego $x \in D$, $x + T \in D$ oraz $f(x + T) = f(x)$

5) Funkcję *f* nazywamy rosnącą w zbiorze *A* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right)$$

6) Funkcję *f* nazywamy malejącą w zbiorze *A* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right)$$

7) Funkcję *f* nazywamy stałą w zbiorze *A* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x\in A}\bigvee_{a\in R} f(x)=a$$

8) Miejscem zerowym funkcji *f* nazywamy taką liczbę x_0 , dla której $f(x_0)=0$;

9) Wartością największą funkcji *f* nazywamy taką liczbę y_{max} , dla której istnieje taki argument x_{max}, że

$$y_{\max}=f(x_{\max})\wedge\bigwedge_{x\neq x_{\max}} f(x)<y_{\max}$$

10) Wartością najmniejszą funkcji *f* nazywamy taką liczbę y_{min} , dla której istnieje taki argument x_{min}, że

$$y_{\min}=f(x_{\min})\wedge\bigwedge_{x\neq x_{\min}} f(x)>y_{\min}$$

PRZYKŁADY

1) Funkcja $y=3x^3-8$ jest różnowartościowa, ponieważ dla dwóch dowolnych różnych argumentów x_1 i x_2 mamy:

$$x_1\neq x_2\Rightarrow x_1^3\neq x_2^3\Rightarrow 3x_1^3\neq 3x_2^3\Rightarrow 3x_1^3-8\neq 3x_2^3-8\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

2) Funkcja $y=5x^2+3$ jest parzysta, ponieważ dla dwóch dowolnych przeciwnych argumentów x i −x ich wartości są równe:

$$f(-x)=5(-x)^2+3\Rightarrow f(-x)=5x^2+3=f(x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

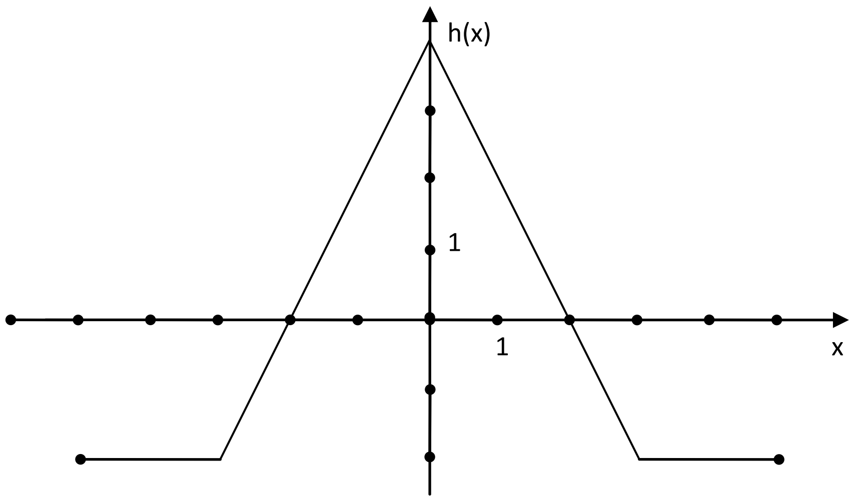
3) Funkcja $y=-x^3+3x$ jest nieparzysta, ponieważ dla dwóch dowolnych przeciwnych argumentów x i −x ich wartości są przeciwne:

$$f(-x)=-(-x)^3+3\cdot(-x)\Rightarrow f(-x)=-\left(-x^3\right)-3x\Rightarrow f(-x)=x^3-3x=-\left(-x^3+3x\right)=-f(x)$$

4) Funkcja $y=x^3$ jest rosnąca w całym zbiorze *R*, ponieważ dla dwóch dowolnych różnych argumentów x_1 i x_2 mamy:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

5) Wykres pewnej funkcji $y=h(x)$ przedstawiono poniżej.



Na podstawie tego wykresu możemy określić własności tej funkcji:

dziedziną jest przedział $\langle -5, 5 \rangle$;

zbiorem wartości jest przedział $\langle -2, 4 \rangle$;

funkcja nie jest różnowartościowa (bo np. dla −3 i 3 przyjmuje taką samą wartość −2);

funkcja jest parzysta, bo jej wykres jest symetryczny względem osi *oy*;

miejscami zerowymi tej funkcji są liczby −2 oraz 2;

funkcja jest rosnąca dla $x \in (-3, 0)$;

funkcja jest malejąca dla $x \in (0, 3)$;

funkcja jest stała dla $x \in (-5, -3) \cup (3, 5)$;

największa wartość funkcji wynosi 4, dla x = 0;

najmniejszą wartość funkcja osiąga dla $x \in \langle -5, -3 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$ i wynosi ona −2.

6) Niektóre własności pewnej funkcji $y = g(x)$ przedstawiono poniżej:

dziedziną jest przedział $\langle -50, 50 \rangle$;

zbiorem wartości jest przedział $\langle -20, 20 \rangle$;

funkcja nie jest różnowartościowa;

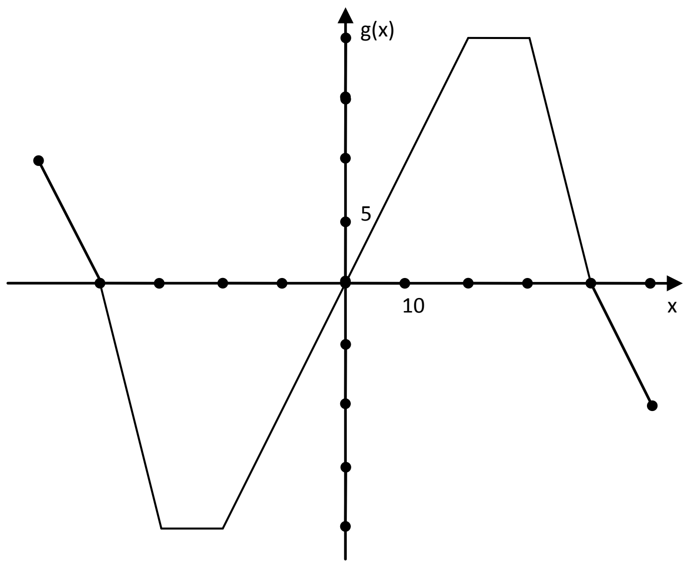
funkcja jest nieparzysta;

miejscami zerowymi tej funkcji są liczby −40, 0 oraz 40 i nie ma innych miejsc zerowych;

funkcja jest rosnąca tylko dla $x \in (-20, 20)$;

funkcja jest malejąca tylko dla $x \in (-50, -30) \cup (30, 50)$.

Na podstawie powyższych własności wykres funkcji *g(x)* może wyglądać następująco:



Nie jest to jedyna wersja wykresu funkcji *g(x)*. Może ich być nieskończenie wiele.

Funkcja złożona

Dane są dwie funkcje *f* i *g* takie, że

$f : X \to Y \qquad g : Y \to Z$

Złożeniem (superpozycją) funkcji *f* i *g* nazywamy funkcję

$h = g \circ f: X \to Z$ określoną wzorem $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Funkcję *g* nazywamy funkcją zewnętrzną, a funkcję *f* wewnętrzną.

PRZYKŁADY

1) Dla funkcji $y=\sin\left(x^2-3x\right)$, funkcją zewnętrzną jest $y=\sin x$, a funkcją wewnętrzną jest $y=x^2-3x$.

2) Dla funkcji $y=\sin^2 x-3\sin x$, funkcją zewnętrzną jest $y=x^2-3x$, a funkcją wewnętrzną jest $y=\sin x$.

Funkcja odwrotna

Jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją różnowartościową, to istnieje funkcja $f^{-1}: Y \to X$ nazywana funkcją odwrotną względem funkcji *f*, określona wzorem $x = f^{-1}(y)$.

Wykresy funkcji *f* i f^{-1} są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$.

Wyznaczając funkcję odwrotną do funkcji $y=f(x)$, wyznaczamy najpierw *x* ze wzoru funkcji *f*, a następnie zamieniamy oznaczenia zmiennych: *x* na *y* i *y* na *x*.

PRZYKŁADY

1)Dla funkcji $y=x+3$ funkcją odwrotna jest funkcja $y=x-3$, bo:

$y=x+3 \Rightarrow x=y-3$ i zamieniając zmienne otrzymujemy $y=x-3$.

2) Dla funkcji $y=2x$ funkcją odwrotna jest funkcja $y=\frac{1}{2}x$, bo:

$y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$ i zamieniając zmienne otrzymujemy $y=\frac{1}{2}x$.

3) Dla funkcji $y=\frac{2x}{x+1}$, gdzie $x\in R\setminus\{-1\}$, funkcją odwrotna jest funkcja $y=\frac{-x}{x-2}$, gdzie $x\in R\setminus\{2\}$, bo:

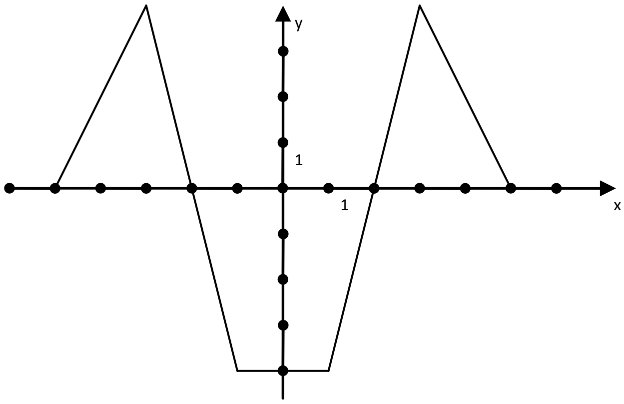
$$y=\frac{2x}{x+1}\Big/\cdot(x+1) \Rightarrow y(x+1)=2x \Rightarrow yx+y=2x \Rightarrow yx-2x=-y \Rightarrow x(y-2)=-y\Big/:(y-2) \Rightarrow x=\frac{-y}{y-2}$$

i zamieniając zmienne otrzymujemy $y=\frac{-x}{x-2}$.

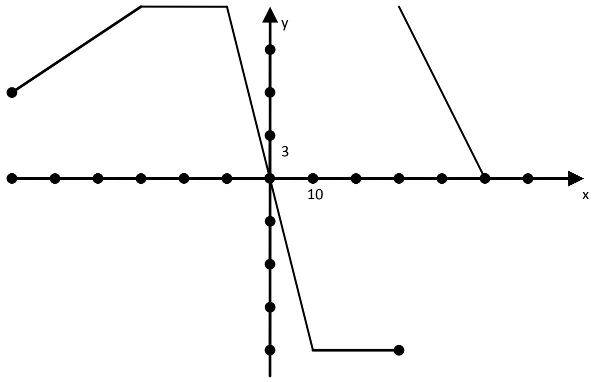
O bardziej skomplikowanych funkcjach odwrotnych będzie mowa w dalszej części skryptu.

ZADANIA

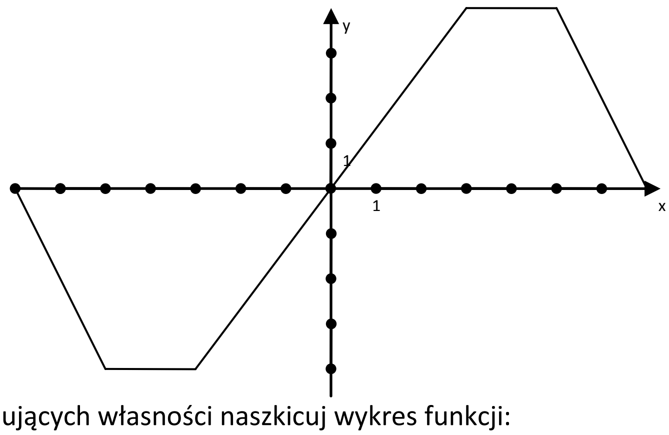
1. Na podstawie poniższego wykresu wyznacz własności funkcji:



2. Na podstawie poniższego wykresu wyznacz własności funkcji:



3. Na podstawie poniższego wykresu wyznacz własności funkcji:



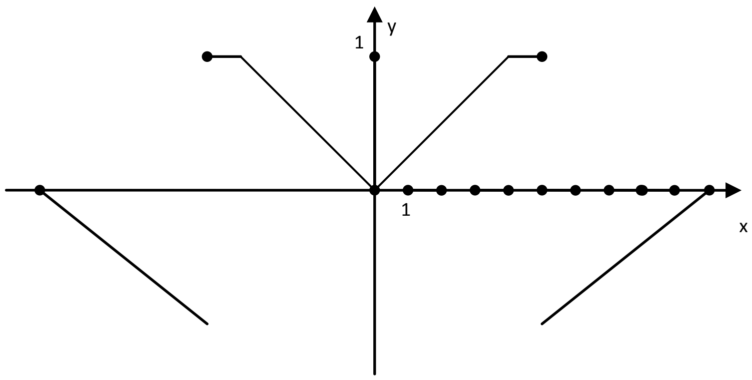
4. Na podstawie następujących własności naszkicuj wykres funkcji:
$D=\langle -10,10\rangle$; $f_{\max}=1$ tylko dla $x\in\langle -5,-4\rangle\cup\langle 4,5\rangle$; $f_{\min}$ nie istnieje; $f\nearrow$ tylko dla $x\in(0,4)\cup(5,10)$; funkcja jest parzysta; $y=0$ tylko dla $x\in\{-10,0,10\}$.
5. Na podstawie następujących własności naszkicuj wykres funkcji:
$D=\langle -80,80\rangle$; $ZW=\langle -50,50\rangle$; $f_{\max}$ tylko dla $x\in(0,40\rangle\cup\{-80\}$; funkcja jest nieparzysta; $y=0$ tylko dla $x\in\{-60,0,60\}$.
6. Sprawdź czy funkcja dana wzorem: $f(x)=2x-x^2$, jest parzysta.
7. Sprawdź czy funkcja dana wzorem: $f(x)=\dfrac{2}{x^3+x}$, jest nieparzysta.

8. Sprawdź czy funkcja dana wzorem: $f(x)=2x^3+1$, jest różnowartościowa.
9. Wyznacz funkcje odwrotne do następujących funkcji:

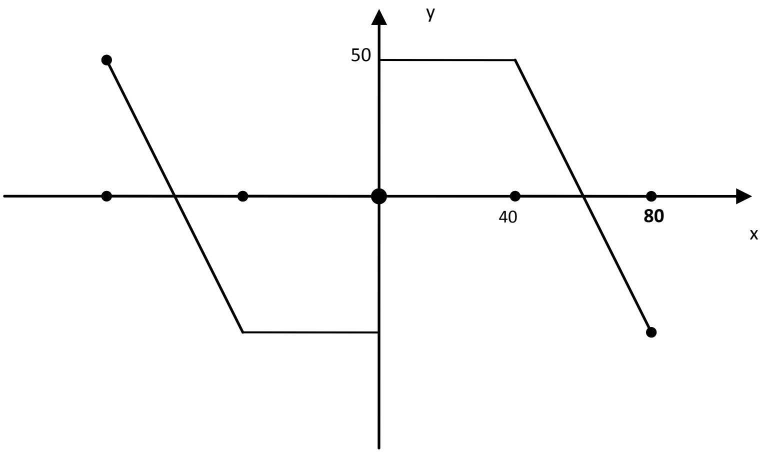
a) $y=3x-5$, b) $y=\frac{5x+4}{6}$ c) $y=\frac{5x+4}{x}$, $(x\neq 0)$ d) $y=\frac{x+4}{2x-4}$, $(x\neq 2)$

Odpowiedzi

1. $D=\langle -5, 5\rangle$; $ZW=\langle -4,\ 4\rangle$; $f_{\max}=4$ dla $x\in\{-3,3\}$; $f_{\min}=-4$ dla $x\in\langle -1, 1\rangle$; $f\nearrow$ dla $x\in(-5,-3)\cup(1,3)$; $f\searrow$ dla $x\in(-3,-1)\cup(3,5)$; $f\rightarrow$ dla $x\in(-1,1)$; $y=0$ dla $x\in\{-5,-2,2,5\}$; funkcja parzysta.
2. $D=\langle -60, 50\rangle$; $ZW=\langle -12,\ 12\rangle$; $f_{\max}=12$ dla $x\in\langle -30,-10\rangle$; $f_{\min}=-12$ dla $x\in\langle 10, 30\rangle$; $f\nearrow$ dla $x\in(-60,-30)$; $f\searrow$ dla $x\in(-10,10)\cup(30,50)$; $f\rightarrow$ dla $x\in(-30,-10)\cup(10,30)$; $y=0$ dla $x\in\{0, 50\}$
3. $D=\langle -7, 7\rangle$; $ZW=\langle -4,\ 4\rangle$; $f_{\max}=4$ dla $x\in\langle 3, 5\rangle$; $f_{\min}=-4$ dla $x\in\langle -5,-3\rangle$; $f\searrow$ dla $x\in(-7,-5)\cup(5,7)$ $f\nearrow$ dla $x\in(-3,3)$; $f\rightarrow$ dla $x\in(-5,-3)\cup(3,5)$; $y=0$ dla $x\in\{-7,0,7\}$; funkcja nieparzysta.
4.



5.

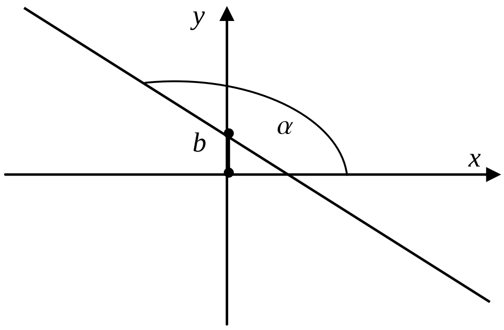


9. a) $y=\frac{x+5}{3}$ b) $y=\frac{x+5}{3}$ c) $y=\frac{4}{x-5}$, $x\neq 5$ d) $y=\frac{4+4x}{2x-1}$, $x\neq\frac{1}{2}$

V. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję $f : R\rightarrow R$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a liczbę b – wyrazem wolnym. Wykresem funkcji *y = ax + b*, gdzie $x \in R$, jest linia prosta nachylona do osi *x* pod takim kątem α*,* że *a* = tgα i przecinająca oś O*y* w punkcie, którego rzędna jest równa *b.*



Rys. 3. Wykres funkcji liniowej

Współrzędne każdego punktu należącego do prostej o równaniu *y = ax + b*, spełniają to równanie. Stąd mając dwa punkty: A(x_A, y_A) i B(x_B, y_B) przez które przechodzi prosta, możemy znaleźć jej równanie, rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} y_A = a \cdot x_A + b \\ y_B = a \cdot x_B + b \end{cases}$$

z niewiadomymi *a* i *b*.

PRZYKŁADY

1) Wyznacz 3 punkty należące do prostej o równaniu: $y = 5x + 2$

Rozwiązanie:

Wstawiając x=0 do równania prostej otrzymujemy y=2 czyli punkt $P_1 = (0,2)$; dla x=1 mamy y=7, stąd punkt $P_2 = (1,7)$; dla x=100 mamy punkt $P_3 = (100,502)$.

2) Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A(3, 4) i B(−1, 2).

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 3 + b \\ 2 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 3a + b \\ 2 = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ 4 = 3 \cdot (b - 2) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ 10 = 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = 2,5 \end{cases}$$

Czyli równanie tej prostej jest następujące: $y = 0,5x + 2,5$.

Dwie proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe ich równań są jednakowe. Natomiast dwie proste są prostopadłe, gdy współczynniki kierunkowe ich równań są odwrotne i przeciwne.

Na przykład proste: $l_1 : y = 3x - 9$ i $l_2 : y = 3x + 4$ są równoległe, a proste: $l_3 : y = -2x - 9$ i $l_4 : y = \frac{1}{2}x + 40$ są prostopadłe.

PRZYKŁADY

1) Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu: $y = 3x + 2$, przechodzącej przez punkt $P = (7,1)$

Rozwiązanie:

Skoro ma to być prosta równoległa do prostej $y = 3x + 2$, to jej współczynnik kierunkowy musi być równy 3, czyli jej równanie ma postać: $y = 3x + b$. Nieznany współczynnik *b* znajdziemy wstawiając do tego równania współrzędne punktu *P*: $1 = 3 \cdot 7 + b \Rightarrow b = -20 \Rightarrow y = 3x - 20$

2) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu: $y = \frac{1}{4}x + 2$, przechodzącej przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

Rozwiązanie:

Skoro ma to być prosta prostopadła do prostej $y = \frac{1}{4}x + 2$, to jej współczynnik kierunkowy musi być równy (−4), czyli jej równanie ma postać: $y = -4x + b$. Nieznany współczynnik *b* znajdziemy wstawiając do tego równania współrzędne punktu *P*:

$3 = -4 \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow y = -4x + 5$

3) Wyznacz punkt wspólny prostych: $l_1 : y = -2x - 1$ i $l_2 : y = 3x + 4$

Rozwiązanie:

Skoro ma to być punkt należący zarówno do jednej jak i drugiej prostej, to jego współrzędne muszą spełniać tak równanie prostej l_1 jak i równanie prostej l_2, czyli musza spełniać układ równań:

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb (−1, 1) czyli punktem przecięcia się obu prostych jest punkt $P = (-1, 1)$.

Wzajemne położenie dwóch prostych, a rodzaj układu równań

Dwie proste mogą się przecinać i wtedy ich częścią wspólną jest jeden punkt, którego współrzędne znajdujemy rozwiązując układ równań zwany oznaczonym.

Dwie proste mogą być równoległe i leżeć obok siebie, wtedy nie mają części wspólnej, a układ równań tych prostych nazywamy sprzecznym.

Natomiast dwie proste równoległe, leżące jedna na drugiej, mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. A układ równań tych prostych nazywamy nieoznaczonym.

N.p.

Układ $\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=3x+4 \end{cases}$ jest oznaczony. Układ $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=3x+4 \end{cases}$ jest sprzeczny. A układ $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$ jest nieoznaczony. Ten ostatni typ układu równań przeważnie nie występuje w tak otwartej postaci, drugie równanie jest zwykle w innej formie, ale po przekształceniu otrzymujemy dwa takie same równania.

ZADANIA

1. Wyznacz 3 punkty należące do prostej o równaniu: $y=7x-5$
2. Sprawdź czy punkt $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{6}\right)$ należy do prostej o równaniu: $y=\frac{7}{9}x+\frac{11}{9}$
3. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A(−1, 4) i B(2,− 2).
4. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A(3, −1) i B(−1, −3).
5. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu: $y=-2x+2$, przechodzącej przez punkt $P=(-3,1)$
6. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{13}$, przechodzącej przez punkt $P=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
7. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu: $y=\frac{1}{3}x+2$, przechodzącej przez punkt $P=\left(\frac{1}{4},-3\right)$
8. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu: $y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}$, przechodzącej przez punkt $P=(3,-4)$
9. Wyznacz punkt wspólny prostych: $l_1: y=2x-10$ i $l_2: y=3x-4$
10. Rozwiąż układy równań:

    a) $\begin{cases} y=x-10 \\ y=3x-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=-2x+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y-2x=1 \\ 3y=6x+3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -\frac{1}{2}y-2x=1 \\ 3y=-4x+3 \end{cases}$
11. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku: A(2, 3), B(4,1) i C(3, −4). Wyznacz jego czwarty wierzchołek.
12. Dane są wierzchołki trójkąta: A(−2, 3), B(4,1) i C(1, −2). Wyznacz spodek wysokości tego trójkąta wychodzącej z wierzchołka C.

Odpowiedzi

3. $y=-2x+2$; 4. $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$; 5. $y=-2x-5$; 6. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$; 7. $y=-3x-2\frac{1}{4}$;

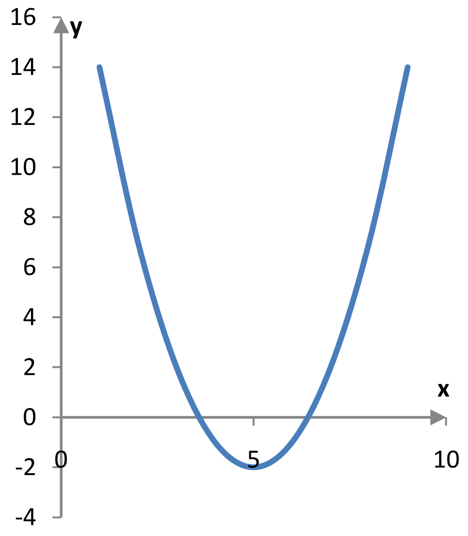
8. $y=\frac{5}{3}x-9$; 9. $P(-6,-22)$; 10a. $x=-3,\ y=-13$; 10b. układ sprzeczny;

10c. układ nieoznaczony; 10d. $x=-\frac{9}{8},\ y=\frac{5}{2}$; 11. $D(1,-2)$; 12. $D\left(2\frac{1}{5},1\frac{3}{5}\right)$.

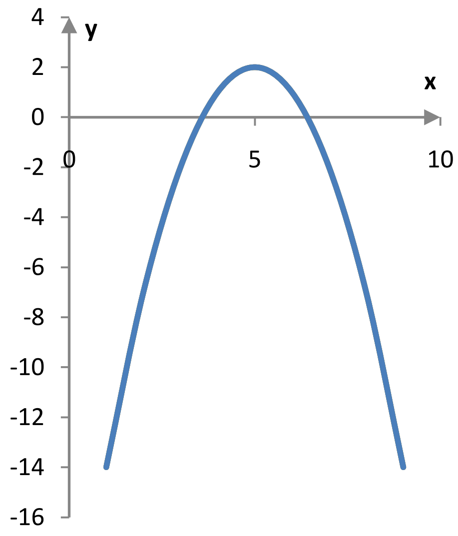
VI. Funkcja kwadratowa

Funkcję $f:R\rightarrow R$ określoną wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową (trójmianem kwadratowym) w postaci ogólnej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest linia krzywa zwana parabolą. Parabola może mieć ramiona skierowane w górę lub w dół. Jeżeli współczynnik a w równaniu ogólnym funkcji kwadratowej jest dodatni ,to ramiona paraboli są skierowane w górę (rys. 4a), a jeżeli $a<0$, to ramiona paraboli są skierowane w dół (rys. 4b).



a)



b)

Rys. 4. Wykres funkcji kwadratowej

Liczbę $\Delta=b^2-4ac$ (delta) nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

Jest to liczba, która znacznie ułatwia wyznaczania wierzchołka paraboli i jej miejsc zerowych. Współrzędne wierzchołka paraboli najczęściej oznacza się literami p i q:

$$p=-\frac{b}{2a},\quad q=-\frac{\Delta}{4a}$$

N.p.

Wierzchołkiem paraboli $f(x)=3x^2+6x+1$ jest punkt $W(-1,-2)$, ponieważ $\Delta=6^2-4\cdot3\cdot1=24$, $p=-\frac{6}{2\cdot3}=-1$ i $q=-\frac{24}{4\cdot3}=-2$

Postać kanoniczna

Funkcję $f(x)=a(x-p)^2+q$ nazywamy funkcją kwadratową w postaci kanonicznej.

N.p.

Postacią kanoniczną trójmianu $f(x)=3x^2+6x+1$ jest funkcja $f(x)=3(x-(-1))^2+(-2)$ czyli $f(x)=3(x+1)^2-2$

Miejsca zerowe

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa posiada dwa różne miejsca zerowe

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeżeli $\Delta= 0$, to funkcja kwadratowa ma jeden (dwukrotny) pierwiastek

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

Jeżeli $\Delta< 0$, to funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków rzeczywistych.

PRZYKŁADY

1) Funkcja kwadratowa $f(x)=-x^2+4x+5$ ma dwa miejsca zerowe, gdyż Δ jest dodatnia (wynosi 36):

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{36}}{2\cdot(-1)}=\frac{-10}{-2}=5 \quad ,x_2=\frac{-4+\sqrt{36}}{2\cdot(-1)}=\frac{2}{-2}=-1.$$

2) Funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+4x+4$ ma jedno miejsce zerowe, gdyż $\Delta = 0$:

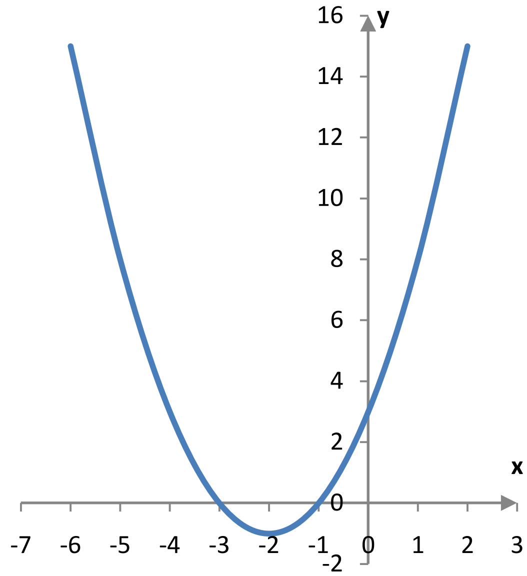
$$x_1=\frac{-4-\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2=x_2=\frac{-4+\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2=x_0=-\frac{4}{2\cdot1}=-2.$$

3) Funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+4x+5$ nie ma miejsc zerowych, gdyż Δ jest ujemna(wynosi (−4)).

Ważną umiejętnością jest naszkicowanie wykresu funkcji kwadratowej czyli paraboli. W tym celu należy wyznaczyć wierzchołek i miejsca zerowe paraboli oraz punkt przecięcia się paraboli z osią oy. W przypadku braku miejsc zerowych lub pokrywania się wierzchołka z miejscem zerowym, pomocniczo można wyznaczyć dwa punkty równoodległe od wierzchołka.

PRZYKŁADY

1) Wykresem funkcji $f(x)=x^2+4x+3$ jest następująca parabola:



Aby dobrze ją narysować obliczamy najpierw Δ, a następnie *p, q,* x_1, x_2:

$\Delta=4;\ p=-2;\ q=-1;\ x_1=-3;\ x_2=-1$

Ponadto wiemy, że *c* = 3, czyli parabola przecina oś O*y* w punkcie (0, 3). Zaznaczamy powyższe punkty na płaszczyźnie *Oxy* i rysujemy parabolę.

Postać iloczynowa

W przypadku, gdy funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$ ma pierwiastki, to można ją zapisać w postaci iloczynowej:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

PRZYKŁADY

1) Funkcja $f(x)=x^2+4x+3$ ma następującą postać iloczynową: $f(x)=(x+3)(x+1)$

2) Funkcja $f(x)=3x^2-4x+1$ ma następującą postać iloczynową: $f(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$

3) Funkcja $f(x)=4x^2+4x+1$ ma następującą postać iloczynową: $f(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

4) Natomiast funkcja $f(x)=x^2+2x+5$ nie posiada postaci iloczynowej, gdyż Δ<0.

Równania i nierówności kwadratowe

Rozwiązanie równania $ax^2+bx+c=0$ jest tożsame z wyznaczeniem miejsc zerowych funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$

Do rozwiązywania nierówności zastosujemy metodę graficzną.

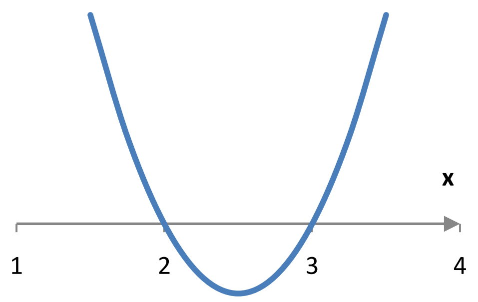
Żeby rozwiązać nierówność kwadratową czyli jedną z nierówności: $ax^2+bx+c<0$ lub $ax^2+bx+c\le 0$ lub $ax^2+bx+c>0$ lub $ax^2+bx+c\ge 0$ należy obliczyć najpierw pierwiastki funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$, a następnie naszkicować wykres funkcji *f(x)* zaznaczając tylko jej miejsca zerowe i w zależności od typu nierówności podać przedział, w którym naszkicowana parabola jest nad osią *Ox* lub pod osią *Ox* .

PRZYKŁADY

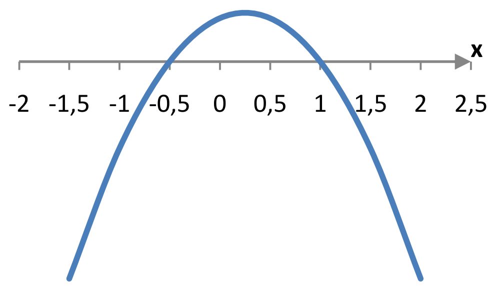
1) Rozwiązaniem równania $x^2-5x+6=0$ są dwie liczby: 2 lub 3, ponieważ $\Delta=1,\ x_1=2,\ x_2=3$

2) Rozwiązaniem równania $x^2-6x+9=0$ jest jedna liczba: 3, ponieważ $\Delta=0,\ x_0=3$

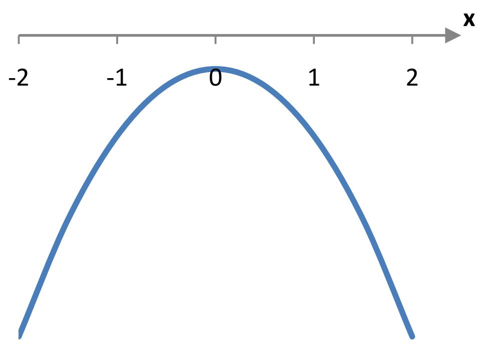
3) Rozwiązaniem nierówności $x^2-5x+6<0$ jest przedział (2, 3), ponieważ $\Delta=1,\ x_1=2,\ x_2=3$, a na szkicu paraboli widzimy, że wartości mniejsze od 0 funkcja przyjmuje dla $x\in(2,\ 3)$



4) Rozwiązaniem nierówności $-2x^2+x+1\ge 0$ jest przedział $\left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$, ponieważ $\Delta=9,\ x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}$, a na szkicu paraboli widzimy, że wartości większe bądź równe 0 funkcja przyjmuje dla $x\in\left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$



5) Rozwiązaniem nierówności $-2x^2-1>0$ jest zbiór pusty, ponieważ $\Delta<0$ i cała parabola znajduje się pod osią *Ox*, więc niema takich argumentów, dla których wartości funkcji $f\left(x\right)=-2x^2-1$ są dodatnie.



Równania dwukwadratowe

Równanie typu $ax^4+bx^2+c=0$ nazywamy równaniem dwukwadratowym i poprzez wprowadzenie pomocniczej zmiennej $t = x^2$ uzyskujemy zwykłe równanie kwadratowe .

N.p.

W równaniu $x^4-5x^2+4=0$ wstawiamy zamiast x^2 pomocniczą zmienną t i otrzymujemy równanie $t^2-5t+4=0$, którego rozwiązaniem są dwie liczby: t_1 = 1 oraz t_2 = 4. Wiedząc, że x^2 = t mamy dwa równania: $x^2=1\vee x^2=4$, z których otrzymujemy cztery rozwiązania:
$\left(x=-1\vee x=1\right)\vee\left(x=-2\vee x=2\right)$.

ZADANIA

1. Narysuj wykresy funkcji:
   a) $y=2x^2-3x-2$
   b) $y=-x^2-5x+6$
   c) $y=-x^2-4x-3$
   d) $y=-x^2+4$

e) $y = x^2 - 4x + 5$

2. Wyznacz wierzchołki parabol:
   a) $y = -2x^2 + 3x + 1$
   b) $y = -x^2 - 8x + 9$
   c) $y = 4x^2 - 8x$
   d) $y = x^2 - 9$
3. Rozwiąż nierówności:
   a) $-x^2 + 6x - 5 < 0$
   b) $4x^2 + 6x \geq 0$
   c) $3x^2 - 2x + 10 < 0$
   d) $6x^2 - 6 \leq 0$
   e) $2x^2 + 4x + 2 > 0$
   f) $4x^2 + 1 \leq 0$
4. Rozwiąż równania:
   a) $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$
   b) $x^4 + x^2 - 12 = 0$
   c) $-3x + 5\sqrt{x} - 2 = 0$
   d) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$
5. Wiedząc, że do wykresu funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + ax + b$ należą punkty: A(1, 3) i B(-2, 1), wyznacz *a* i *b.*
6. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $y = x^2 - x - 2$ w przedziale od -2 do 4.
7. Wiedząc, że wierzchołek wykresu funkcji kwadratowej $y = x^2 + ax + b$ leży w punkcie W(1, 3), wyznacz *a* i *b.*
8. Rozwiąż nierówność:
   a) $-x^4 + 3x^2 - 2 \leq 0$
   b) $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$

Odpowiedzi

2. a) $W\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$; b) $W(-4, 25)$; c) $W(1, -4)$; d) $W(0, -9)$.

3. a) $x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$; b) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 0, \infty)$; c) $x \in \varnothing$;
   d) $x \in \langle -1, 1\rangle$; e) $x \in R \setminus \{-1\}$; f) $x \in \varnothing$.

4. a) $x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; b) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; c) $x \in \left\{\frac{4}{9}, 1\right\}$; d) $x = 1$.

5. $a = \frac{8}{3}, b = -2\frac{1}{4}$ 6. $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\frac{1}{4},\ f_{\max} = f(4) = 14$ 7. $a = -2, b = 4$

8. a) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \left\langle \sqrt{2}, \infty\right)$ b) $x \in \langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$

VII. Wielomiany

Wielomianem stopnia *n* jednej zmiennej rzeczywistej *x* nazywamy funkcję:

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$,

gdzie $n \in N, x \in R, a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0.$

Liczby a_0 ,a_1 ,...,a_n nazywamy współczynnikami wielomianu. Funkcja stała *W(x) = c,* gdzie $c \neq 0$, jest wielomianem stopnia zerowego.

Liczbę *a* nazywamy pierwiastkiem wielomianu *W(x),* jeżeli *W(a)=0.*

N.p.

1) Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = -x^3 - 8x - 9$ jest liczba (−1), bo *W*(−1) = 0.

2) Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ są liczby: −2, −1, 2 i 3.

Wielomian jednej zmiennej stopnia *n* ma co najwyżej *n* pierwiastków.

Dzielenie wielomianów

Wielomian *W*(*x*) stopnia *n* można podzielić przez wielomian *G*(*x*) stopnia $m \leq n$. Wynikiem takiego dzielenia jest wielomian stopnia (*n* –*m*), z resztą będącą wielomianem stopnia *m* – 1. Dzielenie wykonuje się podobnie jak pisemne dzielenie liczb.

N.p.

Żeby podzielić wielomian $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ przez wielomian $G(x) = x^2 - 2x - 1$, należy najpierw podzielić wyraz z najwyższą potęgą wielomianu *W(x)* przez wyraz z najwyższą potęgą wielomianu *G(x)*, czyli $2x^3$ dzielimy przez x^2, otrzymujemy wtedy 2x, co zapisujemy w następujący sposób:

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5\right) : \left(x^2 - 2x - 1\right) = 2x$$

Następnie mnożymy wielomian *G(x)* przez 2x i odejmujemy od wielomianu *W(x)*:

$$\begin{array}{l} \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5\right) : \left(x^2 - 2x - 1\right) = 2x \\ \underline{-\left(2x^3 - 4x^2 - 2x\right)} \\ = \quad x^2 + 6x - 5 \end{array}$$

Następnie dzielimy wyraz z najwyższą potęgą otrzymanego wielomianu przez wyraz z najwyższą potęgą wielomianu *G(x)*, czyli x^2 dzielimy przez x^2, otrzymujemy wtedy 1, co zapisujemy w następujący sposób:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3-3x^2+4x-5\right):\left(x^2-2x-1\right)=2x+1 \\
\underline{-\left(2x^3-4x^2-2x\right)} \\
\quad = \quad x^2+6x-5 \\
\quad\quad \underline{-\left(x^2-2x-1\right)} \\
\quad\quad = \quad 8x-4
\end{array}
$$

I na tym kończymy dzielenie, gdyż ostatni otrzymany wielomian jest stopnia mniejszego niż wielomian *G(x)*. Wielomian 8x – 4 nazywamy resztą z dzielenia wielomianu *W*(*x*) przez *G*(*x*).

Twierdzenie Bezout

Liczba *p* jest pierwiastkiem wielomianu *W(x)* wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian *W(x)* jest podzielny przez dwumian *x* – *p*.

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia wynika wniosek, że jeżeli wielomian $W(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ ma wszystkie współczynniki całkowite i a_n = 1, to liczba całkowita *q* jest pierwiastkiem tego wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy *q* jest dzielnikiem wyrazu a_0.

Liczbę *p* nazywamy *m* – krotnym pierwiastkiem wielomianu *W (x)* wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian *W (x)* jest podzielny przez $(x-p)^m$, ale nie jest już podzielny przez $(x-p)^{m+1}$. Liczbę *m* nazywamy krotnością pierwiastka *p.*

Równania

Wiele zagadnień technicznych można sprowadzić do równań lub nierówności wielomianowych, dlatego ważną umiejętnością jest rozwiązywanie równań 3 i 4 stopnia. Przedstawimy dwie metody znajdowania pierwiastków wielomianu poprzez jego rozkład na wielomiany pierwszego i drugiego stopnia.

Metoda grupowania

Pierwsza metoda oparta jest na wyłączaniu wspólnego czynnika przed nawias, jest to metoda grupowania.

PRZYKŁADY

1) Dla wielomianu $W(x)=4x^3+4x^2-x-1$ z pierwszych dwóch elementów (pierwsza grupa) wyciągamy przed nawias $4x^2$, a z ostatnich dwóch elementów (druga grupa) wyciągamy przed nawias (−1) i mamy: $W(x)=4x^2(x+1)-1(x+1)$. Następnie wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, którym jest (x +1) i otrzymujemy wielomian *W(x)* w postaci iloczynu wielomianu pierwszego stopnia (x +1) i wielomianu drugiego stopnia $(4x^2-1)$ czyli $W(x)=(x+1)(4x^2-1)$. Żeby wyznaczyć pierwiastki wielomianu *W(x)* znajdujemy pierwiastki obu wielomianów czyli rozwiązujemy dwa równania:

$$(x+1)=0 \vee (4x^2-1)=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$$

Uzyskane rozwiązania są pierwiastkami wielomianu $W(x)=4x^3+4x^2-x-1$

2) Dla wielomianu $W(x)=9x^4+9x^3-22x^2-4x+8$ rozkładamy najpierw trzeci składnik ($-22x^2$)na różnicę ($-18x^2 - 4x^2$). Dla otrzymanej w ten sposób postaci $W(x)=9x^4+9x^3-18x^2-4x^2-4x+8$ z pierwszych trzech elementów (pierwsza grupa) wyciągamy przed nawias $9x^2$, a z ostatnich trzech elementów (druga grupa) wyciągamy przed nawias (−4) i mamy:

$$W(x)=9x^2\left(x^2+x-2\right)-4\left(x^2+x-2\right).$$

Następnie wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, którym jest ($x^2 + x -2$) i otrzymujemy wielomian *W(x)* w postaci iloczynu wielomianów drugiego stopnia ($x^2 + x -2$) i ($9x^2 -4$) czyli $W(x)=\left(x^2+x-2\right)\left(9x^2-4\right)$. Żeby wyznaczyć pierwiastki wielomianu *W(x)* znajdujemy pierwiastki obu wielomianów czyli rozwiązujemy dwa równania:

$$\left(x^2+x-2\right)=0 \vee \left(9x^2-4\right)=0 \Rightarrow x=-2 \vee x=1 \vee x=\frac{2}{3} \vee x=-\frac{2}{3}$$

Uzyskane rozwiązania są pierwiastkami wielomianu $W(x)=9x^4+9x^3-22x^2-4x+8$

Metoda oparta na twierdzeniu Bezout

Metodę tę stosuje się najczęściej wtedy, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1. Wtedy sprawdzamy, który z dzielników wyrazu a_0 jest pierwiastkiem wielomianu i dla niego stosujemy twierdzenie Bezout. W ten sposób otrzymamy wielomian *W(x)* w postaci iloczynu wielomianu stopnia pierwszego (x −q) i wielomianu G(x), którego stopień jest o jeden mniejszego od stopnia *W(x)*. Jeżeli wielomian G(x) jest stopnia drugiego to obliczamy jego pierwiastki i mamy zadanie rozwiązane. Jeżeli natomiast wielomian G(x) jest stopnia większego niż 2, to powtarzamy dla niego całą operację: sprawdzamy, który z dzielników wyrazu wolnego jest jego pierwiastkiem, stosujemy twierdzenie Bezout, rozkładamy na iloczyn wielomianu stopnia pierwszego i wielomianu H(x), którego stopień jest o jeden mniejszego od stopnia *G(x)* i.t.d.

PRZYKŁADY

1) Wyraz wolny wielomianu $W(x)=x^3-4x^2+x+6$ wynosi 6. Jego całkowitymi dzielnikami są liczby: 1, 2, 3, 6, −1, −2,−3, −6. Sprawdzamy po kolei, która z tych liczb jest pierwiastkiem tego wielomianu: W(1) = 4, czyli 1 nie jest pierwiastkiem; W(2) = 0, czyli 2 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Stosujemy twierdzenie Bezout czyli dzielimy wielomian W(x) przez dwumian (x – 2):

$$\left(x^3-4x^2+x+6\right):\left(x-2\right)=x^2-2x-3$$
$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$
$$=\ -2x^2+x$$
$$\underline{-\left(-2x^2+4x\right)}$$
$$=\ -3x+6$$
$$\underline{-\left(-3x+6\right)}$$
$$=\ =$$

Dzięki temu wielomian W(x) możemy przedstawić w postaci iloczynu: $W\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x^2-2x-3\right)$

Żeby wyznaczyć pierwiastki wielomianu *W(x)* znajdujemy pierwiastki obu wielomianów czyli rozwiązujemy dwa równania:

$\left(x-2\right)=0 \vee \left(x^2-2x-3\right)=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-1 \vee x=3$

Uzyskane rozwiązania są pierwiastkami wielomianu $W\left(x\right)=x^3-4x^2+x+6$

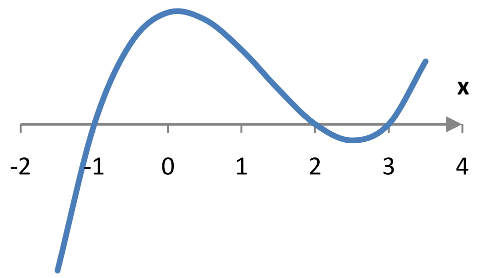
Nierówności

Do rozwiązywania nierówności wielomianowych zastosujemy metodę graficzną. Żeby rozwiązać jedną z nierówności $W\left(x\right)>0$ lub $W\left(x\right)\geq 0$ lub $W\left(x\right)\leq 0$ lub $W\left(x\right)<0$ znajdujemy najpierw pierwiastki wielomianu W(x), zaznaczamy je na osi *Ox* i szkicujemy wykres funkcji *y = W(x)*. W zależności od typu nierówności podajemy przedziały, w których naszkicowana krzywa jest nad osią *Ox* lub pod osią *Ox* .

Rysowanie wykresów wielomianów jest oddzielnym problemem, którego tutaj nie będziemy poruszać. Natomiast, żeby naszkicować wykres, niezbędny do rozwiązania nierówności ,wystarczy narysować linię krzywą tzw. „falę”, której punktami wspólnymi z osią *Ox* są pierwiastki wielomianu. Najlepiej zacząć rysowanie tej linii od strony prawej: od góry, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni lub od dołu, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny. Krzywa ta przebija oś *Ox* w punktach wspólnych wtedy, gdy krotność pierwiastka jest nieparzysta, a „odbija się” od osi *Ox* w punktach wspólnych wtedy, gdy krotność pierwiastka jest parzysta.

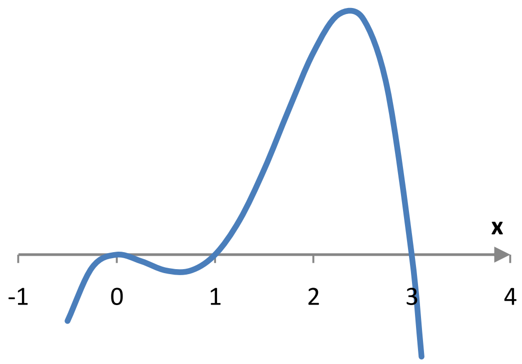
PRZYKŁADY

1) Dla nierówności $x^3-4x^2+x+6>0$ szukamy najpierw miejsc zerowych wielomianu $W\left(x\right)=x^3-4x^2+x+6$. Są nimi liczby $x=-1 \vee x=2 \vee x=3$. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne, więc wykres wielomianu W(x) przebija oś *Ox* w punktach o współrzędnych $x=-1 \vee x=2 \vee x=3$. Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni (przy x^3 jest 1) czyli zaczynamy rysować krzywą od strony prawej, od góry. Stąd szkic wykresu wielomianu $W\left(x\right)=x^3-4x^2+x+6$ jest następujący:



Na podstawie powyższego szkicu stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$ są liczby: $x \in (-1, 2) \cup (3, \infty)$

2) Dla nierówności $-x^4 + 4x^3 - 3x^2 \geq 0$ szukamy najpierw miejsc zerowych wielomianu $W(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2$. Są nimi liczby $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3$, przy czym x= 0 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wykres wielomianu W(x) przebija oś *Ox* w punktach o współrzędnych $x = 1 \vee x = 3$, natomiast w punkcie (0, 0) wykres „odbija się" od osi *Ox*. Współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny czyli zaczynamy rysować krzywą od strony prawej, od dołu. Stąd szkic wykresu wielomianu $W(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2$ jest następujący:



Na podstawie powyższego szkicu stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności $-x^4 + 4x^3 - 3x^2 \geq 0$ są liczby: $x \in \{0\} \cup \langle 1, 3 \rangle$

ZADANIA

1. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 2$ przez wielomian $V(x) = x^2 - 2$
2. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 5x$ przez wielomian $V(x) = x^2 - 2x + 6$
3. Rozwiąż równania:
   a) $x^4 - 3x^2 + 2x = 0$, b) $x^3 + 5x^2 + 10x - 48 = 0$, c) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$
4. Rozwiąż nierówność:

a) $-x^4+3x^2-2\le 0$, b) $x^3+3x^2-9x-27<0$, c) $-x^3+2x^2+25x-50\ge 0$

5. Wiedząc, że do wykresu funkcji $y=x^3-2x^2+ax+b$ należą punkty: A(1, 3) i B(-2, 1), wyznacz *a* i *b.*
6. Dla jakich wartości *a* i *b* liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x)=x^3+ax^2-b$?
7. Wiadomo, że liczba 1 jest pierwiastkiem równania $x^3+2x^2-x+m=0$. Wyznacz najmniejszy pierwiastek tego równania.
8. Wiedząc, że iloczyn wielomianów $W(x)=2x^3+bx^2-5$ i $V(x)=x^2-ax+2$ nie zawiera potęg x^3 i x^2 wyznacz *a* i *b*.

Odpowiedzi

1. $R(x)=-9x+12$ 2. $R(x)=-19x+114$

3. a) $x\in\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\}$ b) $x=2$ c) $x\in\{-5,-3,3\}$

4. a) $x\in(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,\infty)$ b) $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,3)$ c) $x\in(-\infty,-5\rangle\cup\langle 2,5\rangle$

5. $a=-4\frac{1}{3},\ b=8\frac{1}{3}$ 6. $a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ 7. $x=-2$ 8. $a=\frac{8}{5},\ b=\frac{5}{2}$

VIII. Funkcja wymierna

Jeżeli *W(x)* i *G(x)* są wielomianami i *G(x)* jest wielomianem niezerowym, to funkcję $F(x)=\frac{W(x)}{G(x)}$ nazywamy funkcją wymierną. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D=\{x\in R: G(x)\ne 0\}$.

N.p.

1) Dziedziną funkcji $y=\frac{x^3-5}{x^2-4}$ jest zbiór $R\setminus\{-2,2\}$

2) Dziedziną funkcji $y=\frac{15}{x^3-x^2-2x}$ jest zbiór $R\setminus\{-1,0,2\}$

Przy rozwiązywaniu jakichkolwiek zadań dotyczących funkcji wymiernej należy najpierw określić jej dziedzinę.

Równania wymierne

Miejscami zerowymi funkcji wymiernej są miejsca zerowe licznika, o ile należą do dziedziny funkcji. Rozwiązać równanie wymierne $\frac{W(x)}{G(x)}=0$ oznacza to samo, co znaleźć miejsca zerowe funkcji

$$F(x)=\frac{W(x)}{G(x)}$$

PRZYKŁADY

1) Rozwiązując równanie $\frac{x^3-x}{x^2-9}=0$ w pierwszej kolejności wyznaczamy jego dziedzinę, czyli rozwiązujemy taką różność:

$$x^2-9\neq 0\Rightarrow x\neq -3\wedge x\neq 3\Rightarrow D=R\setminus\{-3,\ 3\}$$

Następnie znajdujemy miejsca zerowe wielomianu występującego w liczniku, czyli rozwiązujemy następujące równanie:

$$x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=0\vee x=-1\vee x=1$$

Wszystkie pierwiastki licznika należą do dziedziny tego równania, więc są jego rozwiązaniami.

2) Równanie $\frac{x^3-8}{x^2-4}=0$ nie ma rozwiązań, gdyż dziedziną tego równania jest $R\setminus\{-2,\ 2\}$, a miejscem zerowym licznika jest liczba 2, która nie mieści się w dziedzinie.

3) Równanie $\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=0$ ma jedno rozwiązanie: x= −4, ponieważ drugi pierwiastek licznika, liczba 4, nie należy do dziedziny tego równania , którą jest zbiór $R\setminus\{1,\ 4\}$.

Nierówności wymierne

Przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych pozbywamy się mianownika poprzez pomnożenie obu stron nierówności przez kwadrat mianownika. Otrzymujemy wtedy nierówność wielomianową, przy rozwiązywaniu której trzeba uwzględnić dziedzinę nierówności wymiernej.

PRZYKŁADY

1) Dziedziną nierówności $\frac{x^3-x}{x^2-9}\geq 0$ jest zbiór $R\setminus\{-3,\ 3\}$. Następnie mnożymy obie strony nierówności przez $(x^2-9)^2$:

$$\frac{x^3-x}{x^2-9}\geq 0\Big/\left(x^2-9\right)^2\Rightarrow\left(x^3-x\right)\left(x^2-9\right)\geq 0\Rightarrow x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)\geq 0$$

Otrzymana nierówność wielomianowa ma następujące rozwiązanie: $x\in\langle -3,\ -1\rangle\cup\langle 0,1\rangle\cup\langle 3,\infty)$ uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej, jej rozwiązaniem są liczby: $x\in(-3,\ -1\rangle\cup\langle 0,1\rangle\cup(3,\infty)$

2) Dziedziną nierówności $\frac{x^2-3x-4}{x^3-4x}<0$ jest zbiór $R\setminus\{-2,\ 0,\ 2\}$. Następnie mnożymy obie strony nierówności przez $(x^3-4x)^2$:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}>0\Big/\left(x^3-4x\right)^2\Rightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-4x\right)>0\Rightarrow x(x+1)(x-2)x(x-2)(x+2)>0$$

Otrzymana nierówność wielomianowa ma następujące rozwiązanie: $x \in (-2,\ -1) \cup (0,\ 2) \cup (2, \infty)$, które jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności wymiernej, gdyż całe rozwiązanie nierówności wielomianowej zawiera się w dziedzinie nierówności wymiernej.

ZADANIA

1. Rozwiąż równania

   1. $\frac{x^3 - 4x^2}{9x^2 - 4} = 0$, b) $\frac{4 + 3x - x^2}{x - 4} = 0$, c) $\frac{3x - x^2}{x^2 - 5x + 4} = 0$, d) $\frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{9x^2} = 0$.

2. Rozwiąż nierówności

   a) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} \geq 0$, b) $\frac{x}{4 + 3x - x^2} > 0$, c) $\frac{-1 - 2x - x^2}{x^2 - 5x - 6} < 0$, d) $\frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2} = 0$.

Odpowiedzi

1. a) $x \in \{0,\ 4\}$ b) $x = -1$ c) $x \in \{0, 3\}$ d) $x \in \{-1, 1, 4\}$
2. a) $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 4)$ c) $x \in (-\infty, -1) \cup (6, \infty)$
   d) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$

VIII. Ciągi

Ciąg jest to funkcja przyporządkowująca liczbie naturalnej *n* element a_n pewnego zbioru A. Elementy a_n zbioru A nazywamy wyrazami ciągu.

Przykłady ciągów:

1) 1, 2, 3, 4, 5,…
2) 2 , 4, 6, 8, 10,…
3) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$,…

W pierwszym przypadku mamy: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, itd.

W drugim przypadku mamy: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, itd.

W trzecim przypadku mamy: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, itd.

Wszystkie wyżej wymienione przykłady to nieskończone ciągi liczbowe.
Skończonym ciągiem liczbowym jest np.: 1,2,3,4,5 – ciąg liczb naturalnych od 1 do 5.

Monotoniczność ciągu

Ciąg rosnący to taki ciąg (a_n), dla którego dla każdej liczby naturalnej *n* prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg niemalejący to taki ciąg (a_n), dla którego dla każdej liczby naturalnej *n* prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$.

Ciąg malejący to taki ciąg (a_n), dla którego dla każdej liczby naturalnej *n* prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg nierosnący to taki ciąg (a_n), dla którego dla każdej liczby naturalnej *n* prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \le a_n$.

Ciąg stały to taki ciąg (a_n), którego wszystkie wyrazy są równe.

Każdy ciąg spełniający którykolwiek z powyższych warunków to ciąg monotoniczny.

Przykłady ciągów:

Ciąg (2*n*) jest ciągiem rosnącym, bo dla każdego $n \in N$ prawdziwa jest nierówność $2(n+1) > 2n$, czyli każdy następny wyraz tego ciągu jest większy od poprzedniego.

Ciąg (2 − *n*) jest ciągiem malejącym, bo dla każdego $n \in N$ prawdziwa jest nierówność $2-(n+1)<2-n$, czyli każdy następny wyraz tego ciągu jest mniejszy od poprzedniego.

Ciąg ($(-1)^n$) nie jest ciągiem monotonicznym, bo wyrazy tego ciągu są na przemian ujemne i dodatnie – dla *n* parzystych wyrazy tego ciągu są dodatnie, a dla *n* nieparzystych są ujemne.

PRZYKŁADY

1) Oblicz cztery kolejne wyrazy ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{2n-1}{3n}$.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć cztery kolejne wyrazy tego ciągu należy za n podstawić do wzoru kolejne liczby naturalne od 1 do 4:

$$a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{3\cdot 1} = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{3\cdot 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3\cdot 3} = \frac{5}{9},\ a_4 = \frac{2\cdot 4-1}{3\cdot 4} = \frac{7}{12}.$$

2) Wskaż wszystkie wyrazy ciągu równe zero: a) $a_n = n^2 - 4n + 3$, b) $a_n = \frac{8n-8}{n-3}$, c) $a_n = n - 4\sqrt{n} + 3$.

Rozwiązanie:

a)Najpierw ustalamy dziedzinę: $D = N$.

Aby wskazać wszystkie wyrazy tego ciągu równe zero, należy ogólny wzór tego ciągu przyrównać do zera i rozwiązać równanie (w tym wypadku równanie kwadratowe):

$n^2 - 4n + 3 = 0$.

Liczymy deltę: $\Delta = 16 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$.

Obliczamy dwa rozwiązania: $n_1 = \frac{4-2}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$, $n_2 = \frac{4+2}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$.

Oba rozwiązania należą do dziedziny, więc ostateczna odpowiedź brzmi: Pierwszy i trzeci wyraz podanego ciągu są równe zero.

b)Ustalamy dziedzinę: mianownik musi być różny od zero, więc $n \ne 3 \Rightarrow D = N - \{3\}$.

Ułamek jest równy zero $\Leftrightarrow$ licznik jest równy zero. $\Rightarrow 8n - 8 = 0 \Rightarrow 8n = 8 \Rightarrow n = 1$. Ponieważ n=1 należy do dziedziny, ostateczna odpowiedź brzmi: pierwszy wyraz podanego ciągu jest równy zero.

c)Ustalamy dziedzinę: nie ma pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych, więc $n > 0$ i $n \in N$

$\Rightarrow D = N$.

Ogólny wzór przyrównujemy do zera: $n - 4\sqrt{n} + 3 = 0$. Rozwiązujemy to równanie metodą podstawiania: niech $t = \sqrt{n}$, $t \in R$

Mamy, więc równanie kwadratowe postaci: $t^2 - 4t + 3 = 0$. Po rozwiązaniu mamy: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$ $\Rightarrow \left(\sqrt{n} = 1 \text{ lub } \sqrt{n} = 3\right)$ i $n \in N \Rightarrow n = 1$ lub $n = 9$.

Ponieważ oba rozwiązania należą do dziedziny, ostateczna odpowiedź brzmi: Pierwszy i dziewiąty wyraz podanego ciągu są równe zero.

3) Zbadaj monotoniczność ciągu: a) $a_n = 3n - 2$, b) $a_n = n^2 + 2n - 3$, c) $a_n = \dfrac{n+2}{3n-1}$.

Rozwiązanie:

Zbadać monotoniczność ciągu tzn. ustalić czy dany ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący, czy stały lub może w ogóle nie jest monotoniczny.

W tym celu należy obliczyć różnicę dwóch kolejnych wyrazów danego ciągu: $a_{n+1} - a_n$. Jeżeli ta różnica jest dla każdego $n \in N$:

-dodatnia, to ciąg jest rosnący

- dodatnia lub równa zero, to ciąg jest niemalejący
- ujemna, to ciąg jest malejący
- ujemna lub równa zero, to ciąg jest nierosnący.

a)Obliczamy różnicę: $a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 2] - [3n - 2] = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$. Jest ona dodatnia dla każdego $n \in N \Rightarrow$ ciąg jest rosnący.

b)Obliczamy różnicę: $\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [(n+1)^2 + 2(n+1) - 3] - [n^2 + 2n - 3] = \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - 3 - n^2 - 2n + 3 = 2n + 3 \end{aligned}$. Jest ona dodatnia dla każdego $n \in N \Rightarrow$ ciąg jest rosnący.

c)Obliczamy różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+2}{3(n+1)-1} - \frac{n+2}{3n-1} = \frac{n+3}{3n+2} - \frac{n+2}{3n-1} =$$

$$= \frac{(n+3)(3n-1) - (n+2)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{3n^2 + 8n - 3 - 3n^2 - 8n - 4}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{-7}{(3n+2)(3n-1)}$$

Jest ona ujemna dla każdego $n \in N \Rightarrow$ ciąg jest malejący.

ZADANIA

1. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu:

   a) $a_n = 2^n - 1$, b) $a_n = 2n^2 - 3n + 2$, c) $a_n = 6n - 2$, d) $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$, e) $a_n = \dfrac{(3n+2)^2}{n}$, f) $a_n = 1 - 3n$, g) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, h) $a_n = 1 - \dfrac{1}{2n+5}$.
2. Wskaż wszystkie wyrazy ciągu równe zero:

a) $a_n = n^2 - 5n + 6$, b) $a_n = 2n - 1$, c) $a_n = 4 - 5n$, d) $a_n = 3n + \sqrt{n} - 4$, e) $a_n = 2n^2 - n - 1$,

f) $a_n = n - \sqrt{n} + 30$, g) $a_n = \frac{6n - 12}{n - 2}$, h) $a_n = \frac{n^2 + 8n - 12}{n + 3}$, i) $a_n = \frac{18 - 6n}{\sqrt{n - 1}}$, j) $a_n = \frac{5n}{\sqrt{n}}$.

3. Wykaż, że dany ciąg jest rosnący:

a) $a_n = n - \frac{1}{3}$, b) $a_n = 4n - 1$, c) $a_n = 3^n$, d) $a_n = n^2 + 2$, e) $a_n = \frac{6n + 1}{3}$, f) $a_n = \frac{5n + 2}{n + 1}$.

4. Wykaż, że dany ciąg jest malejący:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, b) $a_n = 5 - n$, c) $a_n = \frac{-n + 1}{2n + 3}$, d) $a_n = \frac{1}{2^n}$, e) $a_n = -9n^2 - 2n + 7$, f) $a_n = \frac{3 - 2n}{4n + 5}$.

5. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $a_n = 15 - n$, b) $a_n = n^2 + 2n + 7$, c) $a_n = \frac{1}{n + 5}$, d) $a_n = 6n + 2$, e) $a_n = \frac{n + 3}{n + 1}$, f) $a_n = \frac{1}{3^n + 2}$.

Odpowiedzi

1. a) $a_1 = 1,\ a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15$; b) $a_1 = 1,\ a_2 = 4, a_3 = 11, a_4 = 22$;

c) $a_1 = 4,\ a_2 = 10, a_3 = 16, a_4 = 22$; d) $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{5}{9}, a_4 = \frac{7}{16}$;

e) $a_1 = 25,\ a_2 = 32, a_3 = 40\frac{1}{3}, a_4 = 49$; f) $a_1 = -2,\ a_2 = -5, a_3 = -8, a_4 = -11$;

g) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{16}$; h) $a_1 = \frac{6}{7},\ a_2 = \frac{8}{9}, a_3 = \frac{10}{11}, a_4 = \frac{12}{13}$.

2. a) $n = 2 \vee n = 3$; d) $n = 1$; e) $n = 1$; i) $n = 3$; b) c) f) g) h) j) brak.

5. a) c) e) f) ciągi malejące; b) d) ciągi rosnące.

Granice ciągów

Liczbę *g* nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $m > 0$, że nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > m$. Mówimy wtedy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby *g*.

A bardziej potocznie: Jeżeli przy *n* dążącym do nieskończoności (zwiększającym się w nieskończoność) wyrazy ciągu (a_n) wciąż się zmniejszają (lub zwiększają) i coraz bardziej zbliżają się do jakiejś liczby *g*, ale jej ani nie osiągają, ani nie przekraczają, to mówimy, że ta liczba *g* jest granicą tego ciągu.

Twierdzenia o granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to prawdziwe są następujące równości

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(k\cdot a_n\right)=k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\ b_n\neq 0\wedge\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$

5) $a_n\leq b_n\leq c_n\wedge\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=g\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=g$

Ta ostatnia równość nosi nazwę twierdzenia o trzech ciągach.

PRZYKŁADY

1)Oblicz granicę ciągu: a) $a_n=(3n)$, b) $b_n=\left(\frac{1}{n}\right)$, c) $c_n=\left(\frac{n+3}{4n-2}\right)$, d) $d_n=\left(\frac{2n^2+3n-5}{2n-5}\right)$.

Rozwiązanie:

a) W tym przykładzie łatwo policzyć granicę, ponieważ *n* dąży do nieskończoności, więc n pomnożone przez 3 też dąży do nieskończoności: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}3n=\infty$.

b) Kiedy w ułamku mianownik zwiększa się w nieskończoność, to cały ułamek zmniejsza się do liczby 0: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$.

Aby policzyć granicę ciągu z podpunktu c i d należy licznik i mianownik podzielić przez najwyższą potęgę *n* występującą w mianowniku:

c) W tym przykładzie najwyższą potęgą n w mianowniku jest n^1, czyli po prostu *n*, więc dzielimy licznik i mianownik przez n: $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{4n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{4n}{n}-\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{4-\frac{2}{n}}$

Ponieważ granica sumy to suma granic, granica różnicy to różnica granic, granica iloczynu to iloczyn granic, a granica ilorazu to iloraz granic, możemy napisać:

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}$$

Korzystając z podpunktu b (granica ciągu w postaci ułamka, gdzie licznik jest stałą liczbą, a mianownik dąży do nieskończoności, jest równa 0) i uwzględniając, że granica ciągu stałego $a_n=x$, $x\in R$ jest po prostu równa x możemy napisać:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1+0}{4-0} = \frac{1}{4}.$$

d) W tym przykładzie najwyższą potęgą n w mianowniku jest n^2, więc dzielimy licznik i mianownik przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n-5}{3n^2-5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{5n}{n^2}+\frac{7}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

Tak jak w poprzednim podpunkcie możemy zapisać:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}}$$

Mamy:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{\infty+0-0}{3-0+0} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

2)Oblicz granicę ciągu: $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Rozwiązanie:

W tym zadaniu należy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach (podanego jako ostatnie w twierdzeniach o granicach ciągów zbieżnych na początku tego tematu). W tym celu najpierw mnożymy i dzielimy nasz ciąg przez wyrażenie z przeciwnym znakiem, czyli w tym przypadku: $\sqrt{n^2+1}+n$ i otrzymujemy:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}$$

Wiemy, że: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Liczba e

Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba *e*. W przybliżeniu jest ona równa: $e = 2{,}71828\ldots$

Granicą ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ również jest liczba *e* przy założeniu, że ciąg (a_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych.

Ciąg $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba $\frac{1}{e}$.

Dla przykładu, podajemy poniżej kilka pierwszych wyrazów ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}(370)$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}44140625$$

$$a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} = 2{,}48832$$

$$\vdots$$

$a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = \frac{25937424601}{10000000000} = 2{,}5937424601$

$\vdots$

itd.

PRZYKŁADY

1)Oblicz granicę ciągu: a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$, b) $b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n}$.

Rozwiązanie:

Aby móc skorzystać z liczby e należy doprowadzić podany wzór na ogólny wyraz ciągu do postaci $a_n = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ tak, aby w mianowniku ułamka i w potędze występowało to samo wyrażenie.

a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^3$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$, więc ostatecznie mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^3 = e^3$.

b)

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{5n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$, więc ostatecznie mamy:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e\cdot e\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e\cdot e\cdot e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{5}{2}}$$

Tak samo postępujemy, gdy w zadaniu korzystamy z warunku: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$. Wtedy sprowadzamy ogólny wzór ciągu do postaci: $\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, by móc skorzystać z granicy $\frac{1}{e}$.

Granice niewłaściwe ciągów

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby A istnieje taka liczba m, że dla każdego $n > m$ zachodzi nierówność $a_n > A$.

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby A istnieje taka liczba m, że dla każdego $n > m$ zachodzi nierówność $a_n < -A$.

A bardziej potocznie:

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$, kiedy przy *n* zwiększającym się w nieskończoność wyrazy ciągu (a_n) są coraz większe i również zwiększają się w nieskończoność.

Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$, kiedy przy *n* zwiększającym się w nieskończoność wyrazy ciągu (a_n) są coraz mniejsze i zmniejszają się w minus nieskończoność.

PRZYKŁADY

1)Zbadaj zbieżność ciągu: a) $a_n = n - n^2$, b) $b_n = n^2 - 2\sqrt{n}$.

Rozwiązanie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = \lim\limits_{n\to\infty}[-n(-1+n)] = \lim\limits_{n\to\infty}(-n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = -\infty\cdot\infty = -\infty$

Odp. Ciąg a_n jest rozbieżny do $-\infty$.

b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(n^2 - 2\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^2 - 2n^{\frac{1}{2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{1}{2}}\left(n^4 - 2\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(n^4 - 2\right) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Odp. Ciąg b_n jest rozbieżny do $+\infty$.

ZADANIA

1) Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n+2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+4}{n^2+4}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-7}{n^3}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+2n+3}{7n^3-5n^2+4}$.

2) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = 4n-3$, b) $b_n = 20-3n$, c) $c_n = n^3 - n$, d) $d_n = \sqrt[3]{n} - n^3$.

3) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, b) $b_n = \sqrt{n^2+2} - n$, c) $c_n = \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}$, d) $d_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+n^2}\right)$

4) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$, b) $b_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{4n}$, c) $c_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{6n}$, d) $d_n = \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{2n+4}$.

5) Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$, b) $b_n = \left(1-\dfrac{1}{4n}\right)^{5n}$, c) $c_n = \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{12n}$, d) $d_n = \left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{2n-4}$.

Odpowiedzi

1. a) 3; b) 2; c) 0; d) 4/7. 2. a) ∞; b) −∞; c) ∞; d) −∞. 3.a) 0; b) 0; c) ½; d) 0.

4. a) e^2; b) $e^{\frac{4}{3}}$; c) e^{18}; d) e^2. 5. a) e^{-3}; b) $e^{-\frac{5}{4}}$; c) e^{-48}; d) e^{-2}.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny to ciąg liczbowy (a_n), w którym różnica dwóch kolejnych wyrazów: $r = a_{k+1} - a_k$ (gdzie k - jest liczbą naturalną) jest stała. r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Wyraz n-ty można obliczyć ze wzoru:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

lub ze wzoru:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można obliczyć według wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

A podstawiając wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego do wzoru na sumę jego n początkowych wyrazów otrzymujemy wzór:

$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$$

PRZYKŁADY

1)Oblicz pięć kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mając podany jego pierwszy wyraz i różnicę: a) $a_1 = 2$, $r = 3$, b) $a_1 = 1$, $r = -2$.

Rozwiązanie:

Należy podstawić dane z zadania i pięć kolejnych liczb naturalnych od 1 do 5 do wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

a) $a_1 = 2$

$a_2 = 2 + (2-1)\cdot 3 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = 2 + (3-1)\cdot 3 = 2 + 6 = 8$

$a_4 = 2 + (4-1)\cdot 3 = 2 + 9 = 11$

$a_5 = 2 + (5-1)\cdot 3 = 2 + 12 = 14$

b) $a_1 = 1$

$a_2 = 1 + (2-1)\cdot(-2) = 1 - 2 = -1$

$a_3 = 1 + (3-1)\cdot(-2) = 1 - 4 = -3$

$a_4 = 1 + (4-1)\cdot(-2) = 1 - 6 = -5$

$a_5 = 1 + (5-1) \cdot (-2) = 1 - 8 = -7$

2)Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego mając podane jego pierwszy wyraz i któryś z kolei: a) $a_1 = 2$, $a_5 = 10$, b) $a_1 = 1$, $a_{10} = -3{,}5$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Podstawiamy dane z zadania i obliczamy *r*:

a) $a_5 = a_1 + (5-1) \cdot r \Rightarrow 10 = 2 + 4 \cdot r \Rightarrow 4r = 8 \Rightarrow r = 2$.

b) $a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot r \Rightarrow -3{,}5 = 1 + 9 \cdot r \Rightarrow 9r = -4{,}5 \Rightarrow r = -0{,}5$.

3) Wyznacz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego mając podaną jego różnicę i jeden z jego wyrazów: a) $r = 3$, $a_4 = 9$, b) $r = -5$, $a_6 = -10$.

Rozwiązanie:

Również korzystamy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Podstawiamy dane z zadania i obliczamy a_1:

a) $a_4 = a_1 + (4-1) \cdot r \Rightarrow 9 = a_1 + 3 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 0$.

b) $a_6 = a_1 + (6-1) \cdot r \Rightarrow -10 = a_1 + 5 \cdot (-5) \Rightarrow a_1 = 15$.

4)Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że: $a_1 = 2$, $r = 3{,}5$.

Rozwiązanie:

Ogólny wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego ma postać: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Podstawiając dane z zadania otrzymujemy wzór: $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3{,}5$.

5)Oblicz sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wiedząc, że:
a) $a_1 = 1$, $r = 4$, $n = 15$, b) $a_1 = 2$, $r = -5$, $n = 10$.

Rozwiązanie:

Po prostu podstawiamy dane z zadania do wzoru na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} r$.

a) $S_{15} = 15 \cdot 1 + \frac{15(15-1)}{2} 4 \Rightarrow S_{15} = 15 + 15 \cdot 14 \cdot 2 \Rightarrow S_{15} = 435$.

b) $S_{10} = 10 \cdot 2 + \frac{10(10-1)}{2} (-5) \Rightarrow S_{10} = 20 + 5 \cdot 9 \cdot (-5) \Rightarrow S_{10} = -205$.

6)Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego wiedząc, że: $a_1 = 3$, $S_6 = 63$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r \Rightarrow S_6 = 6 \cdot a_1 + \frac{6(6-1)}{2}r \Rightarrow 63 = 6 \cdot 3 + \frac{6(6-1)}{2}r \Rightarrow 63 = 18 + 3 \cdot 5 \cdot r$$

$$\Rightarrow 15r = 45 \Rightarrow r = 3.$$

7)Sprawdź czy podany ciąg jest arytmetyczny: a) $a_n = 3n + 2$, b) $a_n = 3^n$.

Rozwiązanie:
Aby sprawdzić czy podany ciąg jest arytmetyczny, należy obliczyć różnicę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu. Jeżeli różnica jest stała dla każdego $n \in N$ to ciąg jest ciągiem arytmetycznym, w przeciwnym wypadku nim nie jest.

a) $a_n = 3n + 2$, $a_{n+1} = 3(n+1) + 2$

$$a_{n+1} - a_n = [3(n+1) + 2] - [3n + 2] = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3$$

Różnica jest stała dla każdego $n \in N$, więc ciąg jest arytmetyczny.

b) $a_n = 3^n$, $a_{n+1} = 3^{n+1}$

$$a_{n+1} - a_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 3 - 3^n = 3^n(3-1) = 3^n \cdot 2$$

Różnica nie jest stała, dla każdego $n \in N$ przyjmuje inną wartość, więc ciąg nie jest arytmetyczny.

ZADANIA

1. Oblicz pięć kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mając podany jego pierwszy wyraz i różnicę:
   a) $a_1 = 1$, $r = 4$, b) $a_1 = 3{,}5$, $r = 2{,}5$, c) $a_1 = -2$, $r = 5$, d) $a_1 = -5$, $r = -2$, e) $a_1 = 4$, $r = -4$, f) $a_1 = -1$, $r = 1{,}5$, g) $a_1 = -0{,}5$, $r = 0{,}5$, h) $a_1 = 6$, $r = 10$.
2. Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego mając podane jego pierwszy wyraz i któryś z kolei:
   a) $a_1 = 1$, $a_6 = 6$, b) $a_1 = 2{,}5$, $a_{10} = 25$, c) $a_1 = 5$, $a_3 = 9$, d) $a_1 = 1{,}4$, $a_5 = 2{,}2$, e) $a_1 = -5$, $a_4 = -14$, f) $a_1 = -1$, $a_{23} = 21$.
3. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego mając podaną jego różnicę i jeden z jego wyrazów:
   a) $r = 2$, $a_2 = 5$, b) $r = -3$, $a_5 = 4{,}5$, c) $r = 2{,}5$, $a_7 = 6$, d) $r = -0{,}3$, $a_6 = 4{,}6$, e) $r = 0{,}6$, $a_3 = 15$, f) $r = \frac{1}{3}$, $a_8 = 6\frac{2}{3}$.
4. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że:
   a) $a_1 = 5$, $r = 3$, b) $a_1 = 3\frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{2}$, c) $a_1 = -2\frac{4}{5}$, $r = -\frac{2}{5}$, d) $a_1 = 6$, $r = 0{,}1$, e) $a_1 = 0$, $r = 2$, f) $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{5}$.
5. Oblicz sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wiedząc, że:
   a) $a_1 = 6$, $r = 2$, $n = 6$, b) $a_1 = 2{,}5$, $r = 0{,}5$, $n = 10$, c) $a_1 = 0$, $r = 1{,}5$, $n = 15$, d) $a_1 = -2$, $r = -3$, $n = 22$, e) $a_1 = 7$, $r = -4$, $n = 17$, f) $a_1 = 25$, $r = 2$, $n = 26$.
6. Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego wiedząc, że:
   a) $a_1 = 0$, $S_9 = 45$, b) $a_1 = 2$, $S_{15} = 135$, c) $a_1 = -2$, $S_{20} = 0$, d) $a_1 = 1$, $S_4 = 24$, e) $a_1 = 3$, $S_7 = -2$, f) $a_1 = -1$, $S_6 = -15$.

7. Sprawdź czy podany ciąg jest arytmetyczny:

a) $a_n = 5n + 2$, b) $a_n = n^2 + 2n + 4$, c) $a_n = 6n^3$, d) $a_n = \frac{2n-1}{n}$, e) $a_n = 4 - n$, f) $a_n = 2^n - 1$.

8. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

Odpowiedzi

1. a) $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 9,\ a_4 = 13,\ a_5 = 17$; b) $a_1 = 3\frac{1}{2},\ a_2 = 6,\ a_3 = 8\frac{1}{2},\ a_4 = 11,\ a_5 = 13\frac{1}{2}$;

c) $a_1 = -2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 8,\ a_4 = 13,\ a_5 = 18$; d) $a_1 = -5,\ a_2 = -7,\ a_3 = -9,\ a_4 = -11,\ a_5 = -13$;

e) $a_1 = 4,\ a_2 = 0,\ a_3 = -4,\ a_4 = -8,\ a_5 = -12$; f) $a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 2,\ a_4 = 3\frac{1}{2},\ a_5 = 5$;

g) $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = 1,\ a_5 = 1\frac{1}{2}$; h) $a_1 = 6,\ a_2 = 16,\ a_3 = 26,\ a_4 = 36,\ a_5 = 46$.

2. a) $r = 1$; b) $r = 2{,}5$; c) $r = 2$; d) $r = 0{,}2$; e) $r = -3$; f) $r = 1$.

3. a) $a_1 = 3$; b) $a_1 = 16{,}5$; c) $a_1 = -9$; d) $a_1 = 6{,}1$; e) $a_1 = 13{,}8$; f) $a_1 = 4\frac{1}{3}$.

4. a) $a_n = 3n + 2$; b) $a_n = \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{4}$; c) $a_n = -\frac{2}{5}n - 3\frac{1}{5}$; d) $a_n = 0{,}1n + 5{,}9$;

e) $a_n = 2n - 2$; f) $a_n = \frac{1}{5}n + \frac{4}{5}$.

5. a) $S_6 = 66$; b) $S_{10} = 47{,}5$; c) $S_{15} = 157{,}5$; d) $S_{22} = -737$; e) $S_{15} = -425$; f) $S_{26} = 1300$.

6. a) $r = 1$; b) $r = 1$; c) $r = \frac{4}{19}$; d) $r = 3\frac{1}{3}$; e) $r = -\frac{23}{21}$; f) $r = -\frac{3}{5}$.

7. a) tak, $r = 5$; b) nie; c) nie; d) nie; e) tak, $r = -1$; f) nie.

8. $a_1 = 10,\ r = 3,\ n = 30,\ a_{30} = 97 \Rightarrow S_{30} = 1605$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny (postęp geometryczny) to ciąg liczbowy (a_n), w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów: $q = \frac{a_k}{a_{k-1}}$ (gdzie *k* - jest liczbą naturalną) jest stały. q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

n-ty wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie *q* można obliczyć ze wzoru:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

lub ze wzoru:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

przy założeniu, że $q \neq 1$ (dla $q = 1$, $S_n = a_1 \cdot n$).

PRZYKŁADY

1) Oblicz cztery kolejne wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że: $a_1 = 2$, $q = 4$.

Rozwiązanie:
Należy podstawić dane z zadania oraz liczby naturalne od 1 do 4 do wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = 2 \cdot 4^1 = 2 \cdot 4 = 8$

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32$

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = 2 \cdot 4^3 = 2 \cdot 64 = 128$.

2) Oblicz sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wiedząc, że: $a_1 = 3$, $q = 5$, $n = 3$.

Rozwiązanie:
Należy skorzystać ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Podstawiając dane z zadania do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$S_3 = a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-5^3}{1-5} = 3 \cdot \frac{1-125}{-4} = 3 \cdot \frac{-124}{-4} = 3 \cdot 31 = 93.$$

3)Sprawdź, czy podany ciąg jest geometryczny: a) $a_n = 3^n$, b) $a_n = 3n$.

Rozwiązanie:
Aby sprawdzić czy podany ciąg jest ciągiem geometrycznym należy obliczyć iloraz jego dwóch kolejnych wyrazów. Jeżeli iloraz jest stały dla każdego $n \in N$ to ciąg jest ciągiem geometrycznym, w przeciwnym wypadku nim nie jest.

a) $a_n = 3^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$$

Iloraz jest stały dla każdego $n \in N$, więc podany ciąg jest geometryczny.

b) $a_n = 3n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)}{3n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Iloraz nie jest stały, dla każdego $n \in N$ przyjmuje inną wartość, więc ciąg nie jest geometryczny.

ZADANIA

1) Oblicz cztery kolejne wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $a_1 = 2$, $q = 2$, b) $a_1 = 0$, $q = 3$, c) $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$, d) $a_1 = -0{,}5$, $q = \frac{1}{2}$, e) $a_1 = 0{,}3$, $q = -0{,}1$, f) $a_1 = 4$, $q = \frac{3}{4}$.

2) Oblicz sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 6$, b) $a_1 = 0{,}2$, $q = 4$, $n = 4$, c) $a_1 = 0{,}75$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$, d) $a_1 = -1{,}3$, $q = 0$, $n = 9$, e) $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 3$, f) $a_1 = 2$, $q = 10$, $n = 5$.

3) Sprawdź, czy podany ciąg jest geometryczny:

a) $a_n = 2^{n+2}$, b) $a_n = (\sqrt{3})^n$, c) $a_n = \frac{5}{3^n}$, d) $a_n = 4n + 2^n$, e) $a_n = \frac{1}{n}$, f) $a_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$.

4) Znajdź trzy liczby tworzące ciąg geometryczny wiedząc, że suma tych liczb jest równa 38, a iloczyn 1728.

Odpowiedzi

1. a) $a_1 = 2,\ a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$; b) $a_1 = 0,\ a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$;

   c) $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{27}$; d) $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{8}, a_4 = -\frac{1}{16}$;

   e) $a_1 = 0{,}3;\ a_2 = -0{,}03;\ a_3 = 0{,}003; a_4 = -0{,}0003$; f) $a_1 = 4,\ a_2 = 3, a_3 = \frac{9}{4}, a_4 = \frac{27}{16}$;

2. a) $S_6 = 63$; b) $S_4 = 17$; c) $S_{10} = \frac{3069}{2048}$; d) $S_9 = -1{,}3$; e) $S_3 = \frac{13}{27}$; f) $S_5 = 22222$.

3. a) b) c) f) tak; d) e) nie. 4. Te liczby to: 8, 12 i 18.

Szereg geometryczny

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $|q| < 1$, to istnieje suma szeregu geometrycznego:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

PRZYKŁADY

1)Oblicz sumę szeregu geometrycznego: $5 + 1 + \frac{1}{5} + \ldots$.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć sumę szeregu geometrycznego należy najpierw ustalić jego pierwszy wyraz i jego iloraz – w tym przypadku $a_1 = 5$, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{5}$. Teraz podstawiamy do wzoru na sumę wyrazów szeregu geometrycznego: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}$.

ZADANIA

1. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:
   a) $16 + 4 + 1 + \ldots$
   b) $2 + \sqrt{2} + 1 + \ldots$
   c) $9 + 3 + 1 + \ldots$
   d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.
2. Oblicz sumę szeregu geometrycznego, mając podane a_1 i q:

   a) $a_1 = 2$, $q = \frac{3}{4}$, b) $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = 0{,}1$, c) $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d) $a_1 = 5$, $q = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Odpowiedzi

1. a) $S = \frac{64}{3}$; b) $S = 4 + 2\sqrt{2}$; c) $S = 13\frac{1}{2}$; d) $S = 2$.
2. a) $S = 8$; b) $S = \frac{10}{27}$; c) $S = 2 + \sqrt{2}$; d) $S = \frac{5}{4}\left(5 + \sqrt{5}\right)$.

IX. Funkcja wykładnicza

Definicja

Funkcję f określoną dla danego $a > 0$ wzorem

$$x \to f(x) = a^x$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, nazywamy funkcją wykładniczą.

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy krzywą wykładniczą. Rozróżniamy trzy przypadki funkcji wykładniczej, w zależności od podstawy a.

1. $a > 1$; wówczas dla dowolnych $x_1, x_2 \in R$, jeżeli $x_1 < x_2$ to $a^{x_1} < a^{x_2}$, więc funkcja

   wykładnicza jest rosnąca (rys. 5a).

2. $a = 1$; wówczas dla każdego $x \in R$ $y = 1^x$ ma wartość 1. Wykresem jest linia prosta

   równoległa do osi $0x$ (rys. 5b).

3. $0<a<1$; istnieje liczba $b>1$, taka, że $a=\frac{1}{b}, a^x=\frac{1}{b^x}$; z punktu 1 wynika, że $x \to b^x$ jest funkcją rosnącą, więc $x \to a^x$ jest funkcją malejącą (rys. 5c).

Własności funkcji wykładniczej

a. Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie, tzn.

$$\bigwedge_{x\in R} \bigwedge_{a>0} a^x>0$$

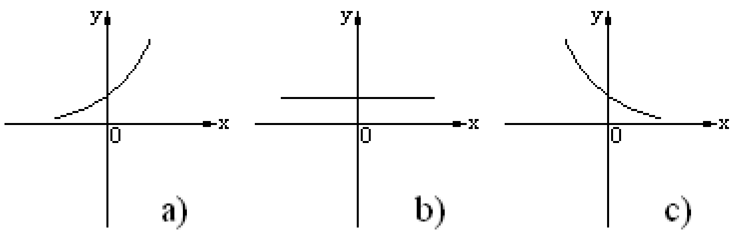
b. Dla $a \neq 1$ funkcja wykładnicza jest funkcją różnowartościową

$$\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{x_1, x_2 \in R} x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$$

c. Funkcja $x \to a^x$, jest rosnąca dla $a>1$, malejąca dla $0<a<1$; stała dla $a=1$.

d. Podstawową własność funkcji wykładniczej wyraża związek

$a^{x_1+x_2}=a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, tzn. $f(x_1+x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2)$.



Rys. 5. Wykresy funkcji wykładniczej

Równania wykładnicze

Równaniem wykładniczym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi.

Przypominamy sposoby rozwiązywania równań wykładniczych, które można sprowadzić do postaci

$$a^{f(x)}=a^{q(x)}$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ oznaczają wykładniki potęg. W rozwiązaniu tego równania opieramy się na własności b) funkcji wykładniczej (różnowartościowość), z której wynika, że

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

czyli możemy „opuścić” podstawy potęg.

PRZYKŁADY

1) Rozwiązać równanie $0{,}125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Rozwiązanie

Idea rozwiązania tego równania polega na uzyskaniu po obu stronach równości tej samej podstawy. Łatwo zauważymy, że wspólną podstawą jest 2.

Zastępując ułamki dziesiętne ułamkami zwykłymi oraz pierwiastek kwadratowy wykładnikiem potęgi $\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

czyli

$$2^{-3} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(2^{-2} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

następnie

$$2^{-3+4x-16} = \left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x}$$

oraz

$$2^{4x-19} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 4x - 19 = \frac{5}{2}x$$

stąd

$$x = \frac{38}{3}$$

2)Rozwiązać równanie $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

Rozwiązanie

$$5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^{x} \cdot 5 - 250 = 0.$$

Wprowadzamy nową niewiadomą $5^{x} = t$ i otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\frac{1}{5}t^{2} + 5t - 250 = 0$$

które ma dwa pierwiastki $t_1 = -50$ i $t_2 = 25$. Otrzymujemy więc dwa elementarne równania wykładnicze $5^x = -50$ i $5^x = 25$. Równanie pierwsze jest sprzeczne, rozwiązaniem drugiego równania jest 2.

3)Rozwiązać równanie $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie

Równanie przekształcamy do postaci $4^x - 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + 4^x \cdot 2^{-1} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}}$. Aby otrzymać jedną wspólną podstawę dzielimy obie strony równania przez 4^x.
Otrzymujemy

$$1 - \frac{3^x}{4^x} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + 2^{-1} = \frac{3^x}{4^x} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

następnie

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

stąd

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{4}{3^{\frac{1}{2}}}$$

oraz

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4}, \text{ czyli } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

4)Rozwiązać równanie $x^{x^2-x-6} = 1$.

Rozwiązanie

Równanie nie jest typowym równaniem wykładniczym, gdyż niewiadoma występuje nie tylko w wykładniku potęgi, a również w podstawie. Jeżeli założymy, że $x \neq 0$, wówczas równanie ma rozwiązanie dla wykładnika potęgi równego zeru, tzn.

$$x^{x^2-x-6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3.$$

Okazuje się, że liczby –2 i 3 nie są jedynymi rozwiązaniami równania. Ponieważ liczba 1 podniesiona do dowolnej (skończonej) potęgi równa się 1, więc kolejnym rozwiązaniem jest $x_3 = 1$. Ponadto wiemy, że również liczba –1 podniesiona do potęgi parzystej równa się 1, więc sprawdzamy, że czwartym pierwiastkiem równania jest $x_4 = -1$.

Nierówności wykładnicze

Nierównością wykładniczą nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje w wykładniku potęgi. Rozpatrzymy tylko takie nierówności wykładnicze, które za pomocą nieskomplikowanych przekształceń można doprowadzić do postaci

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ lub } a^{f(x)} > a^{g(x)},$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, a funkcje f(x) i g(x) oznaczają wykładniki potęg. Znak < (>) można zastąpić znakiem $\leq$ $(\geq)$. Przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych musimy pamiętać, że funkcja wykładnicza jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $0 < a < 1$ (własność b)

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ a > 1, \end{cases} \qquad a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

PRZYKŁADY

1)Rozwiązać nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{|x|}} \leq 1$.

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych $x \neq 0$. Aby otrzymać równe podstawy po obu stronach nierówności, zastępujemy 1 po prawej stronie przez $\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{|x|}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{|x|} \geq 0.$$

Ponieważ mianownik w ostatniej nierówności jest dodatni $(x \neq 0)$, więc możemy pomnożyć przez niego obie strony nierówności. Otrzymujemy

$$\frac{1-x}{|x|} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem nierówności jest suma przedziałów $(-\infty,0) \cup (0,1)$.

2)Rozwiązać nierówność $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$.

Rozwiązanie

Po podstawieniu $2^x = t$ możemy daną nierówność zapisać w postaci

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot t-1}{2t+1}<2\,.$$

Ostatnia nierówność jest nierównością wymierną

$$\frac{\frac{1}{2}t-1}{2t+1}<2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}t-1-2(2t+1)}{2t+1}<0 \Leftrightarrow \frac{-3\left(\frac{1}{2}t+1\right)}{2t+1}<0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t+1\right)(2t+1)>0\,.$$

Wynika stąd, że $t<-2$ lub $t>-\frac{1}{2}$, czyli $2^x<-2$ lub $2^x>-\frac{1}{2}$. Nierówność pierwsza jest sprzeczna funkcji wykładniczej), natomiast druga nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych.

ZADANIA

1. Naszkicować wykresy funkcji:

   a) $y=3^{x+1}$, b) $y=3^x+1$, c) $y=3^{x-1}$, d) $y=-3^x-1$, e) $y=3^{|x|}$, f) $y=3^{-|x|}$, g) $y=-3^{-|x|}$.

2. Rozwiązać równania:

   a) $2^{5x-8}=4^{x-3}$, b) $5^{x-4}=\left(\sqrt{5}\right)^{2-3x}$, c) $3^{x^2+2}=3^{3x}$, d) $16^{x^2}=64^{4x-6}$, e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{4}{9}$,

   f) $5^{x-2}\cdot 25^{x+3}=25$, g) $3^{x-4}\cdot 27^{3-2x}=9^{3x-3}$, h) $\left(\frac{1}{27}\cdot 9^x\right)^x=3^{3x-4}$, i) $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$,

   j) $2^{x+1}\cdot 5^x=200$.

3. Rozwiązać równania:

   a) $2^{x+2}-2^x=48$, b) $5^{2x+2}+5^{2x}=650$, c) $5\cdot 3^x-3^{x+2}+108=0$,

   d) $2\cdot 81^x-3^{4x}-9^{2x-2}=80$, e) $2^{x+1}\cdot 5^x=200$, f) $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$.

4. Rozwiązać równania:

   a) $3^{x+1}+9^x=108$, b) $4^{2x+1}-17\cdot 4^x+4=0$, c) $4^{\sqrt{x}}-5\cdot 4^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}+1=0$,

   d) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$, e) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$, f) $\sqrt{x^x}=x^{\sqrt{x}}$

   g) $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$, h) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

5. Dla jakich wartości parametru *m* równanie $0{,}5^{x^2-mx+0{,}5m-1{,}5}=\left(\sqrt{8}\right)^{m-1}$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

6. Dla jakich wartości parametru *m* równanie $m\cdot 2^x+2^{-x}=5$ ma jedno rozwiązanie?

7. Rozwiązać nierówności

a) $3^{\frac{4}{x}}<\sqrt{3}$, b) $\left(2^{x+1}\right)^2<16$, c) $2^{\frac{x-3}{3x-2}}>\frac{1}{2}$, d) $(0,5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}>\frac{1}{64}$, e) $3^{x^2-7x+12}<1$,

f) $\left(\frac{2}{5}\right)\frac{6-5x}{2+5x}<\frac{25}{4}$, g) $2^{2x+4}-4^x<15$, h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)^2-5x}<\left(\frac{1}{4}\right)^5$, i) $\left(x^2+x+1\right)^x<1$,

j) $\frac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$, k) $5^x+\frac{15}{2-5^x}>0$, l) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x-1}-5^{x+2}$,

ł) $x^2\cdot 2^x+x\cdot 2^{x-1}>0$.

Odpowiedzi

2. a) $\frac{2}{3}$; b) 2; c) $2,1$; d) 3; e) $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; f) $\frac{1}{3}$; g) 1; h) $2,1$; i) $\frac{2}{7}$; j) 2.

3. a) 4, b) 1, c) 3, d) 1, e) 2, f) $\frac{2}{7}$.

4. a) 2; b) $-1,1$; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) -1; f) $1,4$; g) $-\frac{1}{2}\,\mathrm{lub}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{lub}\,x\ge 3$; h) $-2,2$.

5. $\frac{2}{3}<m<2\ \mathrm{lub}\ m>6$.

6. $m=0\ \mathrm{lub}\ m=\frac{25}{4}$.

7. a) $x<0\ \mathrm{lub}\ x>8$; b) $x<1$; c) $x<\frac{2}{3}\ \mathrm{lub}\ x>\frac{5}{4}$; d) $-2<x<4$; e) $3<x<4$;

f) $x<-2\ \mathrm{lub}\ x>-\frac{2}{5}$; g) $x<0$; h) $x<-2\ \mathrm{lub}\ x>3$; i) $x<-1$; j) $x<0\ \mathrm{lub}\ x\ge 1$;

k) $x>1\ \mathrm{lub}\ x<\log_5 2$; l) $x>0$; ł) $x<-0,5\ \mathrm{lub}\ x>0$.

Wybrane zadania maturalne

1. Dane są funkcje $f(x)=3^{x^2-5x}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$. Obliczyć dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

2. Wyznaczyć wartości parametru m, dla których równanie $m\cdot 4^x+2^{2x+1}+m\cdot 2^{x+1}+1=0$ ma jedno rozwiązanie.

Odpowiedzi:

1. $x\in\left(-4,\frac{1}{3}\right)$; 2. $m\in(-\infty,-2)\cup\{-1\}$.

X. Funkcja logarytmiczna

Pojęcie logarytmu

Logarytmem liczby $x > 0$, przy podstawie $a (a > 0\, i\, a \neq 1)$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść *a*, aby otrzymać *x*. Zatem dla $a > 0$ i $a \neq 1$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x,$$

gdzie: *a* – nazywamy podstawę logarytmu, natomiast *x* – liczbą logarytmowaną.

Definicja funkcji logarytmicznej

Funkcję *f* określoną w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich wzorem

$$x \to f(x) = \log_a x,$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ nazywamy funkcją logarytmiczną.

Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna są wzajemnie odwrotne. Wykres funkcji logarytmicznej możemy otrzymać z odpowiedniego wykresu funkcji wykładniczej przez symetryczne odbicie względem dwusiecznej kąta I i III ćwiartki układu współrzędnych OXY.

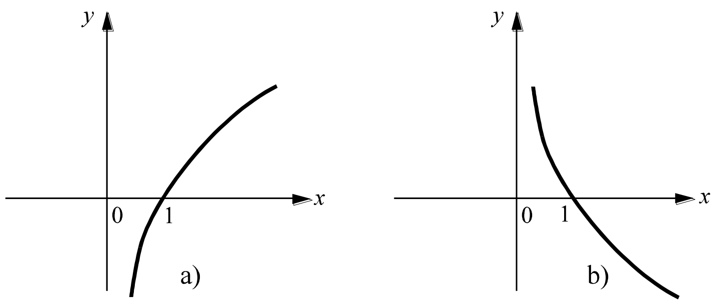
Własności funkcji logarytmicznej

a. Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych.

b. Funkcja logarytmiczna jest funkcją różnowartościową:

$$\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{x_1, x_2 > 0} x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$$

c. Funkcja logarytmiczna jest rosnąca dla $a > 1$, natomiast malejąca dla $0 < a < 1$ (rys.6)



Rys. 6. Wykresy funkcji logarytmicznej

Podstawowe własności funkcji logarytmicznej, których znajomość konieczna jest przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych.

Twierdzenie

a) $\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{x_1, x_2>0} \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

b) $\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{x_1, x_2>0} \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

c) $\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{k\in R} \log_a x^k = k \cdot \log_a x$,

d) $\bigwedge_{a>0, a\neq 1} \bigwedge_{b>0, b\neq 1} \bigwedge_{x>0} \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Równania i nierówności logarytmiczne

Równaniem logarytmicznym (nierównością logarytmiczną) nazywamy równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje w liczbie logarytmowanej lub w podstawie logarytmu.

Przy rozwiązywaniu równań logarytmicznych opieramy się na własności funkcji logarytmicznej (różnowartościowość), z której wynika, że dla $a>0$ i $a\neq 1$ oraz $f(x)>0 \ i \ g(x)>0$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Rozwiązując nierówność logarytmiczną postaci $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) > \log_a g(x))$ musimy pamiętać, że funkcja logarytmiczna (tak jak funkcja wykładnicza) jest rosnąca dla $a>1$ i malejąca dla $0<a<1$ (własność c) funkcji logarytmicznej)

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ a>1 \end{cases} \qquad \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ 0<a<1 \end{cases}$$

przy założeniu, że $f(x)>0,\ g(x)>0,\ a>0,\ a\neq 1$.

PRZYKŁADY

1)Rozwiązać równanie $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$.

Rozwiązanie
Określamy dziedzinę równania

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x<1$$

Następnie dane równanie przedstawiamy w postaci

$$\log_2[(3-x)(1-x)] = 3.$$

Z definicji logarytmu wynika, że $(3-x)(1-x)=2^3$, stąd $x^2-4x-5=0$. Rozwiązaniem ostatniego równania są liczby $x_1=5,\ x_2=-1$. Z określenia dziedziny danego równania logarytmicznego wynika, że rozwiązaniem jest $x=-1$.

2)Rozwiązać równanie $\dfrac{1}{1+\log x}+\dfrac{5}{3-\log x}=3$.

Rozwiązanie

Określamy dziedzinę równania: $x>0$; $1+\log x\neq 0$; $3-\log x\neq 0$. Z nierówności tych wynika, że $x>0$, $x\neq\dfrac{1}{10}$, $x\neq 100$. Możemy wprowadzić nową niewiadomą $\log x=t$. Otrzymujemy równanie wymierne

$$\frac{1}{1+t}+\frac{5}{3-t}=3.$$

Po pomnożeniu przez wspólny mianownik $(1+t)(3-t)$ i wykonaniu przekształceń, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3t^2-2t-1=0,$$

którego pierwiastkami są liczby $t_1=-\dfrac{1}{3}$ i $t_2=1$, zatem $\log x=-\dfrac{1}{3}$ i $\log x=1$, stąd $x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ i $x_2=10$.

3)Rozwiązać równanie $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$.

Rozwiązanie

Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania postaci

$$\left[f(x)\right]^{\log_a g(x)}=h(x),$$

które rozwiązujemy przez logarytmowanie obydwu stron przy podstawie *a* (przy odpowiednich założeniach). Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, spełniających nierówność $x+1>0$, czyli $x>-1$. Dla $x>-1$ obie strony równania są dodatnie, więc możemy je obustronnie zlogarytmować przy podstawie 10

$$\log(x+1)^{\log(x+1)}=\log\left[100(x+1)\right].$$

Korzystając z własności logarytmów otrzymujemy

$$\log(x+1)\cdot\log(x+1)=\log 100+\log(x+1).$$

Wprowadzając nową niewiadomą $\log(x+1)=t$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$t^2=2+t$, czyli $t^2-t-2=0$,

którego pierwiastkiem są liczby $t_1 = -1$ i $t_2 = 2$. Stąd mamy

$$\log(x+1) = -1 \text{ i } \log(x+1) = 2$$

czyli

$$x+1 = 10^{-1} \text{ oraz } x+1 = 10^{2}$$

więc

$$x = -0{,}99 \text{ i } x = 99$$

4)Rozwiązać równanie $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych $x > 0$. Korzystamy ze wzoru na zamianę podstaw logarytmów

$$\log_{25} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 25} = \frac{\log_5 x}{2},\ \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3} = \frac{\log_5 \sqrt{3}}{\log_5 \frac{1}{5}} = -\log_5 \sqrt{3}.$$

Po podstawieniu tych związków równanie przyjmuje postać

$$\log_5 x + \frac{\log_5 x}{2} = -\log_5 \sqrt{3},$$

stąd

$$\frac{3}{2}\log_5 x = -\log_5 \sqrt{3},$$

następnie

$$\log_5 x = -\frac{2}{3}\log_5 \sqrt{3} \text{ oraz } \log_5 x = \log_5 (\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}, \text{ czyli } \log_5 x = \log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

stąd

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

5)Rozwiązać nierówność $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności jest zbiór *x* spełniających układ nierówności

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty).. \\ 2x+3 \neq 1, \end{cases}$$

Ponieważ niewiadoma występuje w podstawie logarytmu należy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Leftrightarrow \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 2x+3 \\ 2x+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

2. $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Leftrightarrow \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2x+3 \\ 0 < 2x+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -1$.

Z przypadków 1. i 2. wynika, że $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1,3)$. Uwzględniając dziedzinę nierówności ostatecznie otrzymujemy zbiór *x* spełniający daną nierówność postaci:

$\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1,0) \cup (0,3)$.

6)Rozwiązać nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności jest zbiór *x* spełniających nierówność: $x^2 - 1 > 0$, stąd $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Daną nierówność logarytmiczno-wykładniczą możemy przedstawić w postaci

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

Następnie otrzymujemy równoważną nierówność logarytmiczną $\log_2(x^2-1) < 0$, którą z kolei możemy zapisać w postaci

$$\log_2(x^2-1) < \log_2 1,$$

stąd

$$x^2 - 1 < 1$$

czyli

$$x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

Ostatecznie uwzględniając dziedzinę danej nierówności, zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $\left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right)$.

ZADANIA

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $(a > 0, a \neq 1)$:

a) $y = \log_a(x^2 - 4)$, b) $y = \log_a(x^3 - 8)$, c) $y = \log_a(3^x - 27)$, d) $y = \log_a|x|$,

e) $y=\log_a \frac{2-x}{x+3}$, f) $y=\log_3\left[1-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+6\right)\right]$, g) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}{}^2(x-3)-1}$.

2. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=\log_3|x|$, b) $y=\log_3 x^3$, c) $y=\log_2(1-x)$, d) $y=|\log_3 x|$, e) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$,

f) $y=1+\log_3 x$.

3. Korzystając z definicji logarytmu rozwiązać równania:

a) $\log_{-5}[\log_3(\log_2 x)]=0$, b) $\log_{(x-3)} 4=2$, c) $\log_{(3-x)}(9-x^3)=3$,

d) $\log_5\left[\log_4\left(\log_2{}^2(x-4)\right)\right]=0$, e) $\log_2(9-2^x)=3-x$.

4. Rozwiązać równania

a) $\log(x^2-7x+12)=\log(x-3)+2$, b) $\log\sqrt{x-5}+\log\sqrt{2x-3}=\log 30-1$,

c) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$, d) $\log_4\left\{2\log_3\left[1+\log_2(1+3\log_2 x)\right]\right\}=\frac{1}{2}$

5. Rozwiązać równania:

a) $\frac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x}=1$

b) $\log^2(100x)+\log^2(10x)=14+\log\frac{1}{x}$

c) $\log_x(9x^2)\cdot\log_3^2 x=4$

d) $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9$

e) $x^{\log_3 x}=9$

f) $\log_a 2x+\log_x 2a=1$, a – parametr

g) $\frac{2}{1+\log_4 x}+\frac{1}{5-\log_4 x}=1$

6. Rozwiązać nierówności:

a) $\log_3(x+2)<3$, b) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+5)<-2$, c) $\log_4|x-2|>1$, d) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$,

e) $\frac{\log(4-x)}{\log(2-x)}<1$, f) $\log_{(x-3)}\frac{x-2}{x-4}>1$, g) $\log(3x+4)x^2>1$, h) $\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-\log x}<1$,

7. Rozwiązać nierówności:

a) $\log_2 x\le\frac{2}{\log_2 x-1}$

b) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6$

c) $\log_x (x^3 - x^2 - 2x) < 3$

d) $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) \geq 1$

e) $2^{\log_{2-x}(x^2+8x+15)} \leq 2{,}5$

f) $\left|\log \frac{x-1}{x+1}\right| < 3$

g) $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$

Odpowiedzi

1. a) $x < -2\ x > 2$; b) $x > 2$; c) $x > 3$; d) $x \neq 0$; e) $(-3;2)$; g) $(3, \frac{7}{2}\ \rangle \cup \langle 5, \infty)$.

3. a) 8; b) 5; c) 1 lub 2; d) 6; e) 0 lub 3.

4. a) 104; b) 6; c) 5; e) $x = 4$; f) $\frac{9}{2}$.

5. a) $x = 0$, b) $x_1 = \sqrt{10^{-9}}$, $x_2 = 10$, c) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 3$, d) $x = 5$,

e) $x_1 = 3^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 3^{\sqrt{2}}$, f) $x = a;\ x, a > 0;\ x, a \neq 1$, g) $x_1 = 16$, $x_2 = 64$.

6. a) $(-2{,}24)$; b) $x > \frac{4}{3}$; c) $x < -2$ lub $x > 6$; d) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1{,}2) \cup (3{,}6)$; e) $(2{,}3) \cup (3{,}4)$;

f) $\left(4, 4+\sqrt{2}\right)$; g) $\left(-\frac{4}{3}, -1\right) \cup (0{,}4)$; h) $(0{,}1) \cup (10;\infty)$.

7. a) $0 < x < \frac{1}{2}$ lub $2 < x < 4$, b) $0 \leq x < 27$, c) $x > 2$, d) $-\sqrt{8} \leq x < 1$ lub

$1 < x \leq \frac{\sqrt{41}-1}{5}$, e) $-4 \leq x \leq -1$, f) $x < -\frac{35}{19}$ lub $x > \frac{35}{19}$,

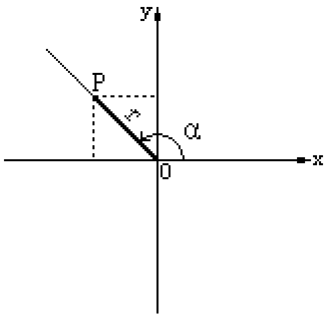
g) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ lub $1 < x < 3$.

XI. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Niech α oznacza dowolny kąt skierowany. Obieramy prostokątny układ współrzędnych *Oxy* tak, aby początkiem układu był wierzchołek kąta α oraz by jedno jego ramię zawierało się w dodatniej półosi Ox (rys. 1). Na drugim ramieniu kąta obieramy dowolny punkt $P(x, y)$ różny od początku układu współrzędnych. Niech r oznacza odległość punktu *P* od początku układu współrzędnych, $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w następujący sposób:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

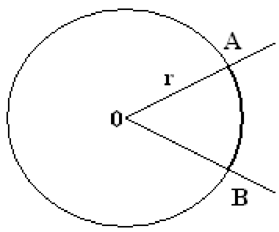
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0,$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}, y \neq 0.$$

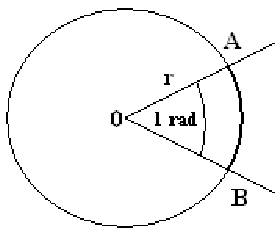
Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Miara łukowa kąta nieskierowanego.

Miarą łukową kąta nieskierowanego nazywamy stosunek długości łuku, będącego częścią wspólną obszaru kąta i dowolnego okręgu zakreślonego z wierzchołka kąta, do promienia tego okręgu (rys. 7a).



a)



b)

Rys. 7. Miara łukowa

Jednostką miary łukowej kąta jest radian (w skrócie rad.).

Radian jest to kąt oparty na łuku, którego długość równa się promieniowi (rys. 7b). Kąt pełny jest oparty na łuku długości $2\pi r$ (*r*-promień), więc miarą łukową kąta pełnego jest $\frac{2\pi r}{r}$, czyli 2π radianów. Ponieważ $360° = 2\pi\,\mathrm{rad}$, więc $180° = \pi\,\mathrm{rad}$, $90° = \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$, $45° = \frac{\pi}{4}\mathrm{rad}$, $1° = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad}$,

$1\mathrm{rad} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \approx 57°17'44''.$

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas istnieje liczba całkowita k i liczba rzeczywista r takie, że $x = 2k\pi + r$, $0 \le r < 2\pi$. Istnieje również kąt α, którego miarą łukową jest r.

Np. $x = \frac{29}{3}\pi = 4\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}$, czyli $r = \frac{5\pi}{3}$; $x = -\frac{31}{7}\pi = -3\cdot 2\pi + \frac{11}{7}\pi$, czyli $r = \frac{11}{7}\pi$.

Sinusem liczby $x = 2x\pi + r$ nazywamy sinus kąta skierowanego α, którego miarą łukową jest r.

Analogicznie definiujemy pozostałe funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej x:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\alpha, \\ \cos x &= \cos\alpha, \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned} \qquad \text{gdzie } \alpha = \left(\frac{180x}{\pi}\right)^{o}, \ x \in R$$

Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ x \in R$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in C$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \ x \neq k\pi, \ k \in C$$

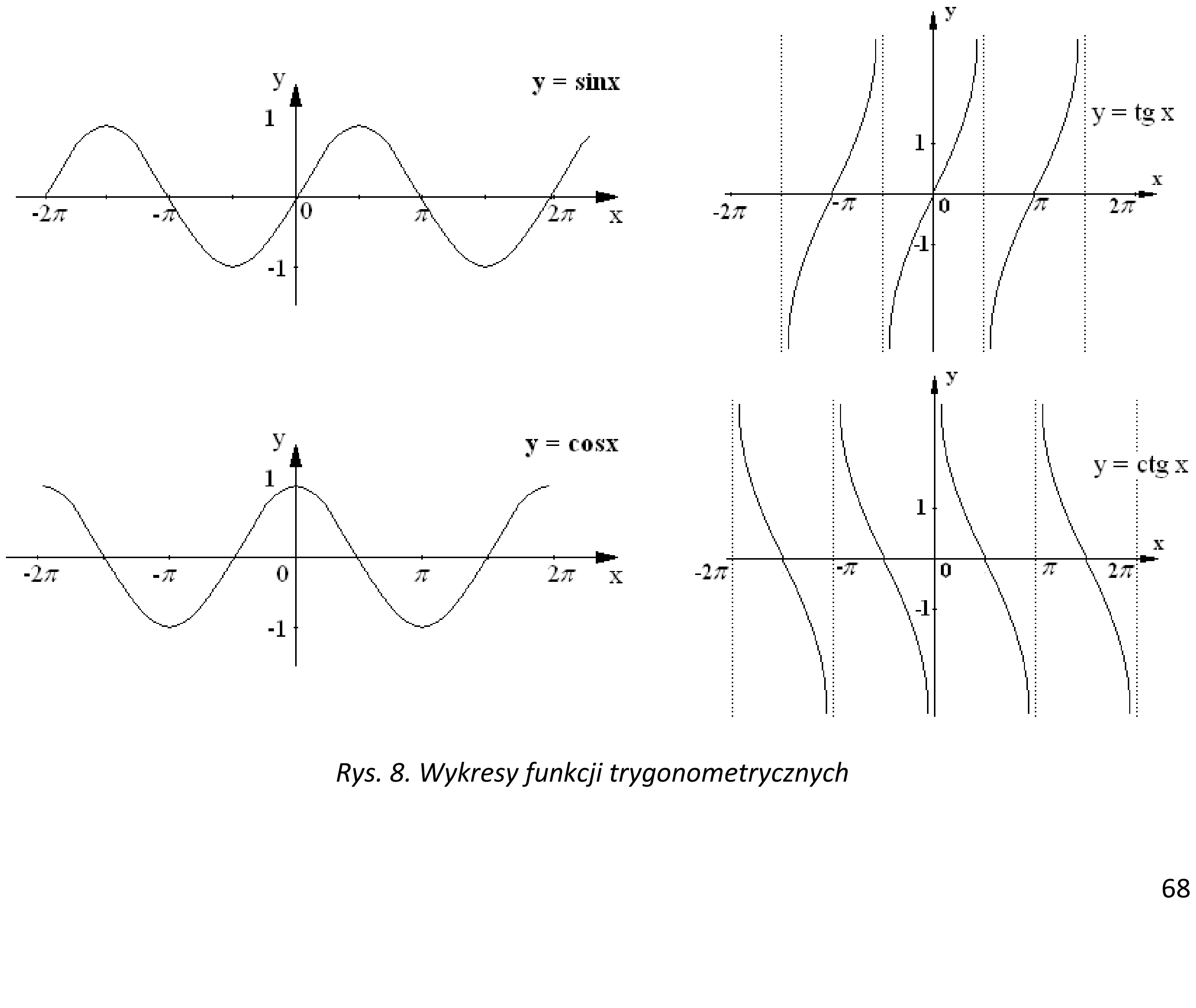
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in C.$$

Funkcje trygonometryczne są okresowe. Okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest 2π, a okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens jest π:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \ \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \ \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \qquad k \in C$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych przedstawione są na rysunku 8.



Rys. 8. Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcja cosinus jest funkcją parzystą natomiast funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste:

$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$,

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

Funkcje sinus i cosinus są funkcjami ograniczonymi, tzn. dla $x \in R$:

$|\sin x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin x \le 1,$

$|\cos x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \cos x \le 1.$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

Dla dowolnych $x, y \in R$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y,\\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y,\\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y,\\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

Na podstawie podanych wzorów możemy wyprowadzić wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy argumentów x, y.

Np. $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ dla $\begin{cases} x + y \ne (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ x \ne (2m+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ y \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, k, m, n \in C \end{cases}$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Dla dowolnych $x, y \in R$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

Wzory redukcyjne

Za pomocą wzorów redukcyjnych możemy wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego miara należy do przedziału $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$.

Wzorów redukcyjnych jest 28.

Każdy z tych wzorów jest postaci (reguła redukcyjna):

$$f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\pm kf(x),$$

gdzie

f oznacza funkcję trygonometryczną, natomiast kf oznacza kofunkcję danej funkcji trygonometrycznej (kofunkcją funkcji sinus jest cosinus, kofunkcją funkcji cosinus jest sinus, ...),

$n\in\{1, 2, 3, 4\}$, $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Zasada reguły redukcyjnej:

1. jeżeli $n=2 \text{ lub } 4$ to $f \ i \ kf$ są tymi samymi funkcjami, jeżeli $n=1 \text{ lub} n=3$ to funkcja *f* zmienia się w kofunkcję (np. tangens na cotangens)

2. wartość $kf(x)$ poprzedzamy znakiem $+ \text{ lub } -$ w zależności od tego, czy $f\left(n\frac{\pi}{2}\pm x\right)$ jest dodatnia czy ujemna (znak funkcji trygonometrycznej w danej ćwiartce układu współrzędnych)

PRZYKŁADY

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$,

b) $\cos(\pi+x)=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$,

c) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\mathrm{ctg}\, x$,

d) $\mathrm{ctg}(2\pi-x)=\mathrm{ctg}\left(4\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)=-\mathrm{ctg}\, x$.

ZADANIA

1. Zbudować kąt α wiedząc, że:

a) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $90^o<\alpha<180^o$;

b) $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ i $180^o<\alpha<270^o$;

c) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ i $\sin\alpha>0$;

d) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ i $\mathrm{tg}\alpha>0$.

2. Wyznaczyć x jeżeli:

a) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0<x<4\pi$;

b) $\sin x = -1,\ 2\pi < x < 4\pi$;

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 < x < 4\pi$;

d) $\cos x = 0,\ 2\pi < x < 3\pi$.

3. Sprawdź tożsamości (przy określonych założeniach):

a) $\frac{\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

b) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{\sin x}$;

c) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

d) $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 3x - \sin x} = \operatorname{tg} 2x$;

e) $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \sin 2x$;

f) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1-2\sin^2 x$;

g) $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}$;

h) $\frac{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}{\sin x + \sin 3x + \sin 5x} = \operatorname{ctg} 3x$.

4. Sporządzić wykresy funkcji w przedziale $\langle 0,\ 2\pi \rangle$:

a) $y = 1 - \cos x$; b) $y = -1 + \cos x$; c) $y = 1 + \sin x$; d) $y = \sin 2x$; e) $y = \cos\frac{x}{2}$;

f) $y = 2\cos x$; g) $y = -3\sin x$; h) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; i) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

j) $y = |\sin x|$.

5. Zbadać, które z podanych funkcji są funkcjami parzystymi, a które nieparzystymi:

a) $y = \cos 2x$; b) $y = x\sin x$, c) $y = \sin^3 x$, d) $y = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$, e) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$,

f) $y = |1 + \cos x|$.

Równania i nierówności trygonometryczne

Równania trygonometryczne

Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem funkcji trygonometrycznych. Na przykład równania

$3\cos x - 1 = 0$, $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \sin x$ są równaniami trygonometrycznymi, natomiast równanie $x\sin x + 3\cos x = 2$ nie jest równaniem trygonometrycznym.

Ogólna metoda rozwiązywania równań trygonometrycznych polega na wyrażaniu wszystkich funkcji występujących w równaniu za pomocą funkcji jednego kąta, a następnie wyrażeniu tych funkcji jedną funkcją tangensa połowy tego kąta.

Załóżmy, że stosując wzory trygonometryczne sprowadziliśmy dane równanie do postaci, w której występują tylko funkcje sinus i cosinus. Niech $f(\sin x, \cos x) = 0$ będzie taką już przekształconą postacią rozwiązywanego równania, gdzie f oznacza funkcję, której argumentami są $\sin x$ i $\cos x$.

Możemy dokonać podstawienia

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$$

wówczas

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Związki te podstawiamy do przekształconej postaci równania trygonometrycznego i otrzymujemy równanie

$$f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 0.$$

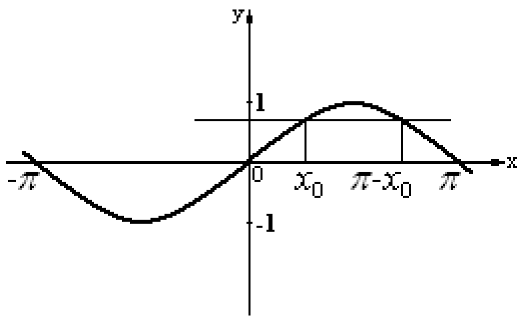
Przekształcając to równanie otrzymujemy równanie algebraiczne o niewiadomej t. Naszkicowana metoda, aczkolwiek jest ogólna, posiada jednak istotne wady. Przede wszystkim przekształcając ostatnie równanie możemy otrzymać równanie algebraiczne wysokiego stopnia, którego rozwiązanie może sprawić dużo kłopotów. W związku z tym w poszczególnych przypadkach stosujemy inne metody rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Najprostszymi równaniami trygonometrycznymi są równania typu $f(x) = a$, gdzie f jest jedną z funkcji trygonometrycznych, x jest zmienną rzeczywistą (niewiadomą), natomiast a oznacza liczbę daną. Równania postaci $\sin x = a,\ \cos x = a,\ \mathrm{tg}\, x = a,\ \mathrm{ctg}\, x = a$ nazywamy podstawowymi równaniami trygonometrycznymi. Każde rozwiązanie równania trygonometrycznego sprowadza się do rozwiązania jednego z czterech poniższych równań: I, II, III lub IV.

I. $\sin x = a$.

Rozwiązanie

Jeżeli $|a| > 1$, to równanie jest sprzeczne, jeżeli $|a| \leq 1$, wówczas w przedziale domkniętym $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ istnieje dokładnie jeden kąt x_0 (funkcja $x \to \sin x$ jest w tym przedziale rosnąca) taki, że $\sin x_0 = a$ (rys. 9)



Rys. 9. Graficzne rozwiązanie równania: $\sin x = a$

Ponadto, ponieważ $\sin x_0 = \sin(\pi - x_0)$, zatem $x = \pi - x_o$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$.

W przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$ o długości 2π równanie ma dwa rozwiązania: $x = x_0$ oraz $x = \pi - x_0$. Ponieważ okresem funkcji sinus jest 2π, więc otrzymujemy dwa zbiory rozwiązań równania $\sin x = a$, a mianowicie $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$,

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Przypadki szczególne

1. Równanie $\sin x = 0$ ma rozwiązanie $x = k\pi$.
2. Równanie $\sin x = 1$ ma rozwiązanie $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
3. Równocześnie $\sin x = -1$ ma rozwiązanie $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

II. $\cos x = a$

Rozumując analogicznie, jak w przypadku I, rozwiązujemy to równanie, przy założeniu $|a| \leq 1$. Otrzymujemy dwa zbiory rozwiązań

$$x = x_0 + 2k\pi \text{ lub } x = -x_0 + 2k\pi$$

gdzie $x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$, k - dowolna liczba całkowita.

Przypadki szczególne

1. Równanie cos x = 0 ma rozwiązanie $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2. Równanie cos x = 1 ma rozwiązanie $x = 2k\pi$.

3. Równanie cos x = – 1 ma rozwiązanie $x = (2k+1)\pi$

gdzie k – dowolna liczba całkowita.

III. Rozpatrzmy z kolei równanie tg x = a.

Dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tangens jest funkcją rosnącą, przyjmującą dowolne wartości rzeczywiste, zatem dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje dokładnie jeden kąt $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ taki, że $\operatorname{tg} x_0 = a$, więc dane równanie ma rozwiązanie $x = x_0$. Z okresowości tangensa wynika, że zbiór wszystkich rozwiązań równania III jest postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, k – dowolna liczba całkowita.

IV. ctg x = a

W analogiczny sposób rozwiązujemy równanie ctg x = a gdzie a – dowolna liczba rzeczywista. Zbiór rozwiązań jest postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie $x_0 \in (0, \pi)$, k – dowolna liczba całkowita.

Liniowe równanie trygonometryczne

Równanie postaci: $a\sin x + b\cos x = c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami, nazywamy liniowym równaniem trygonometrycznym. Istnieje kilka sposobów rozwiązywania tego równania, tutaj podamy sposób, w którym stosujemy metodę ogólną. Podstawiamy $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, następnie wyrażamy sinus i cosinus jako funkcje wymierne zmiennej t. Otrzymujemy wtedy równanie:

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c,$$

gdzie $x \neq (2k+1)\pi$. Po pomnożeniu przez $1 + t^2$ i uporządkowaniu względem potęg t otrzymujemy

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0, \text{ gdy } b + c \neq 0$$

Równanie kwadratowe ma rozwiązanie, gdy

$$\Delta = 4a^2 - 4(b+c)(c-b) = 4\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \geq 0$$

Wówczas

$$t_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{b+c} = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}$$

$$t_2 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{b+c} = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}$$

Jeżeli *b* + *c* = 0, wówczas jest to równanie stopnia pierwszego i otrzymujemy

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{c-b}{2a}$$

Ponadto musimy sprawdzić, czy $x = (2k + 1)\pi$ spełnia równanie.

Równania trygonometryczne, które można sprowadzić do postaci

$$f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_i(x)=0$$

gdzie $f_i(x)$ oznacza funkcję trygonometryczną (i = 1, 2, …, n).

Sposoby rozwiązywania równań tego typu zilustrujemy przykładami.

PRZYKŁADY

1)Rozwiązać równania:

a) $3\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x=0$;

b) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$.

Rozwiązanie

a) Dziedzina równania $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Dane równanie przedstawiamy w postaci $\operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x+1)=0$

Stąd $\operatorname{tg} x=0$ lub $3\operatorname{tg}^2 x+1=0$. Rozwiązaniem pierwszego równania jest zbiór postaci $x = k\pi$, k – liczba całkowita, natomiast drugie równanie jest sprzeczne.

b) Korzystając z prawa przemienności dodawania, zmieniamy kolejność składników i stosujemy wzór na sumę sinusów

$$(\sin 5x+\sin x)+\sin 3x=0,$$
$$2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2}+\sin 3x=0,$$
$$2\sin 3x\cdot\cos 2x+\sin 3x=0,$$
$$\sin 3x(2\cos 2x+1)=0,$$

stąd $\sin 3x=0$ lub $2\cos 2x+1=0$.

Następnie rozwiązujemy równania $\sin 3x=0$ oraz $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

$$\sin x=0,\ \ 3x=k\pi, x=k\frac{\pi}{3};\quad \cos 2x=\frac{1}{2},\quad \cos 2x=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$2x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\,\text{k}$$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

gdzie *k* – liczba całkowita.

2)Dla jakich wartości parametru *a* równanie: $\sin x = a\sin 3x$, ma rozwiązanie?

Rozwiązanie

Ponieważ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, więc dane równanie możemy przedstawić w postaci $\sin x = a\cdot 3\left(\sin x - 4\sin^3 x\right)$, czyli $\sin x\left(1 - 3a + 4a\sin^2 x\right) = 0.$

Ostatnie równanie jest równoważne alternatywie równań

1. $\sin x = 0$ lub 2. $1 - 3a + 4a\sin^2 x = 0.$

Równanie 1 ma rozwiązania postaci $x = k\pi$, *k* – liczba całkowita, natomiast równanie 2 możemy przedstawić w postaci $4a\cdot\sin^2 x = 3a + 1$. Dla $a = 0$ ostatnie równanie przyjmie postać $0\cdot\sin^2 x = -1$ (równanie sprzeczne). Dla $a \neq 0$ otrzymujemy $\sin^2 x = \frac{3a-1}{4a}$. Ponieważ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, więc otrzymujemy $\cos 2x = \frac{1-a}{a}$. Ostatnie równanie ma rozwiązanie jeżeli

$$\left|\frac{1-a}{2a}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{1-a}{2a} \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1-a}{2a} \le 1 \text{ i } \frac{1-a}{2a} \ge -1\right) \Leftrightarrow \left(a \ge \frac{1}{3} \text{ lub } a \le -1\right)$$

Nierówności trygonometryczne

Nierównością trygonometryczną nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje pod znakiem funkcji trygonometrycznych. Na przykład

$$\sin x > \frac{1}{2}, \qquad \cos^2 x + 3\cos x + 1 \le 0.$$

Przy rozwiązywaniu nierówności trygonometrycznych możemy wykorzystać omówione w poprzednim punkcie sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych. Najczęściej rozwiązanie nierówności trygonometrycznych sprowadza się do rozwiązania nierówności typu $f(x) < a$ lub $f(x) > a$, gdzie *f* jest funkcją trygonometryczną, *x* jest niewiadomą, natomiast *a* oznacza liczbę daną.

Analogicznie, jak w przypadku równań trygonometrycznych, nierówności postaci $\sin x < a$ ($\sin x > a$), $\cos x < a$ ($\cos x > a$) nazywamy podstawowymi nierównościami trygonometrycznymi. Znak < (>) możemy zastąpić znakiem ≤ (≥). Rozwiązywanie nierówności trygonometrycznych zilustrujemy na przykładach.

PRZYKŁADY

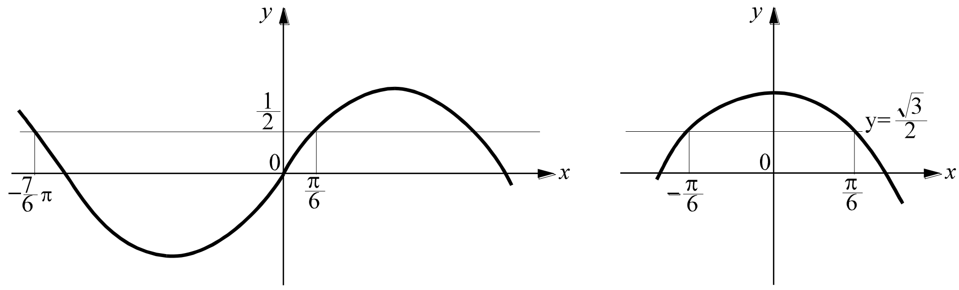
1)Rozwiązać nierówność: $\sin x < \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Przy rozwiązywaniu podstawowych nierówności trygonometrycznych wygodnie jest korzystać z rysunku. Z rysunku 10a wynika, że rozwiązaniem danej nierówności jest przedział $\left(-\frac{7}{6}\pi,\ \frac{\pi}{6}\right)$, zawarty w przedziale $\left(-\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$ o długości 2π. Zbiór wszystkich rozwiązań jest sumą nieskończenie wielu przedziałów liczbowych otwartych postaci $\left(-\frac{7}{6}\pi+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, gdzie *k* – dowolna liczba całkowita.

2)Rozwiązać nierówność: $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie



a) b)

Rys. 10. Graficzne rozwiązania nierówności trygonometrycznych

Rozwiązaniem danej nierówności w przedziale $(-\pi, \pi)$ jest przedział $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ (rys. 10b). Zbiór wszystkich rozwiązań jest sumą nieskończenie wielu przedziałów liczbowych otwartych postaci

$\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, gdzie *k* – dowolna liczba całkowita.

3)Rozwiązać nierówność: $\cos^2 x + \sin x \cos x \geq 1$.

Rozwiązanie

Przenosząc $\cos^2 x$ na prawą stronę otrzymujemy

$\sin x \cos x \geq 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \sin x \cos x \geq \sin^2 x$.

Pomnóżmy obie strony ostatniej nierówności przez 2

$2\sin x \cos x \geq 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin 2x \geq 1 - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x \geq 1$

Następnie mnożąc obie strony otrzymanej nierówności przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mamy

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ponieważ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc podstawiając za $\frac{\sqrt{2}}{2}$ odpowiednio $\cos\frac{\pi}{4}$ i $\sin\frac{\pi}{4}$ do ostatniej nierówności mamy

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do lewej strony stosujemy wzór na cosinus różnicy

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Podstawiając $t = \frac{\pi}{4} - 2x$ otrzymujemy nierówność $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, której rozwiązaniem jest przedział $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 2x \leq \frac{\pi}{4}$. Zbiór wszystkich rozwiązań otrzymamy dodając do krańców nierówności $2\pi k$, gdzie *k* – liczba całkowita

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{4} - 2x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Rozwiązaniem danej nierówności jest więc suma nieskończenie wielu przedziałów liczbowych domkniętych postaci $< k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi >$.

4)Rozwiązać nierówność $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$ dla $x \in (0, \pi)$.

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności jest zbiór $x \neq \frac{\pi}{2}$. Podstawmy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ i przenieśmy 1 na lewą stronę. Mamy

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x}{\cos x} < 0,$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x}{\cos x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x - \cos x - 1}{\cos x} < 0,$$
$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x - \cos x - 1) < 0.$$

Podstawiając cos *x* = *t* otrzymujemy nierówność algebraiczną

$$t(2t^2 - t - 1) < 0.$$

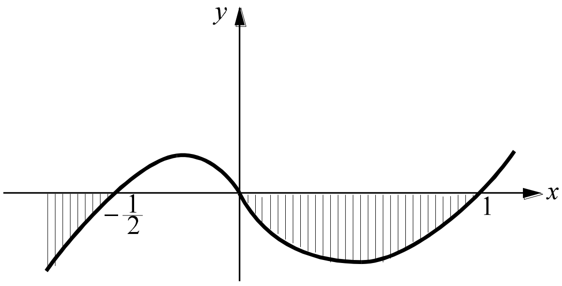
Rozkładamy trójmian kwadratowy

$$2t^2 - t - 1 = 2(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

i otrzymujemy nierówność równoważną

$$2t(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow t(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)<0 .$$

Ostatnią nierówność rozwiązujemy metodą graficzną.

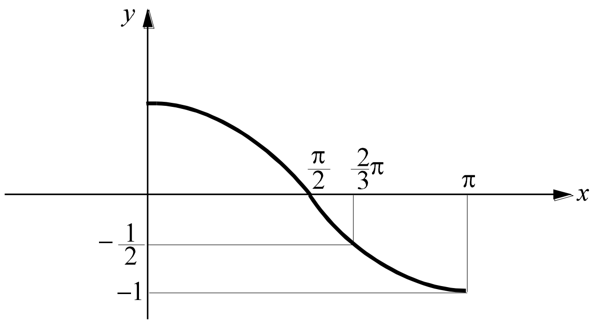


Z powyższego rysunku wynika, że

$$t(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow t<-\frac{1}{2} \text{ lub } 0<t<1$$

czyli

$$\cos x<-\frac{1}{2} \qquad \text{lub} \qquad 0<\cos x<1$$



$\cos x<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi<x<\pi$ oraz $0<\cos x<1 \Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$ (rys. powyżej). Ostatecznie rozwiązaniem danej nierówności jest suma przedziałów $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$.

ZADANIA

1. Rozwiązać graficznie równania:

a) $\cos 2x=\cos x$; b) $\cos x=\sin x$; c) $\operatorname{tg} x=\cos 2x$; d) $\sin 2x=\cos x$ dla $0<x<2\pi$.

2. Rozwiązać równania

a) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; b) $\cos 3x=-\frac{1}{2}$; c) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin\frac{2x}{5}=1$; e) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; f) $\cos x=\frac{1}{2}$

g) $\sin 5x=1$.

3. Rozwiązać równania:

a) $\sin 2x = 2\cos^2 x$

b) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$

c) $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 1$

d) $\cos x = \cos\frac{x}{2} - 1$

e) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$

f) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

g) $2(1-\sin 2x) - 5(\sin x - \cos x) + 3 = 0$

h) $\sin x + \cos x = 1$

i) $\cos x = \cos 3x$

j) $2\sin^2 x + \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 3$

k) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

l) $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin\frac{2x}{2}$

m) $\operatorname{ctg} x - \cos x = \frac{1-\sin x}{2\sin x}$

n) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$

o) $\cos 3x = 2(1+\cos 2x)$

p) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$

q) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

r) $\sin 5x = \sin 7x$

s) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$

4. Dla jakich wartości parametru *a* równanie ma rozwiązanie:

a) $\sin^6 x + \cos^6 x = a$

b) $\frac{\sin x}{2-\cos x} = a \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

5. Rozwiązać graficznie nierówności:

a) $\sin x < \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$;

b) $\cos x > \cos(\pi - x),\ 0 \le x \le \pi$;

c) $\sin x > \sin(\pi - x),\ 0 \le x \le \pi$;

d) $\cos x < \operatorname{tg} x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

e) $\sin x + \cos x < 0,\ 0 \le x \le 2\pi$

6. Rozwiązać nierówności:

a) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x < -\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg} x \ge -1$; d) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x > \frac{1}{2}$;

e) $2\cos^4 x - 3\cos^2 x - 1 > 0$; f) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x > \frac{2}{\sqrt{3}}$; g) $\sin x > \cos x$.

7. Rozwiązać nierówności:

a) $4^{2\sin(\pi+x)} - 2 < 4^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$; b) $\log_{\frac{1}{3}}\left[4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] < \log_{\frac{1}{3}} 3$.

8. Wykazać, że dla każdego $x \in R$ i $n \in N$ prawdziwa jest nierówność $|\sin nx| \le n|\sin x|$.

Odpowiedzi

2. a) $x = k \cdot \frac{\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12}$; b) $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$; c) $x = \frac{3}{4}\pi(8k \pm 3)$; d) $x = \frac{5}{4}\pi(4k+1)$;

e) $x = \pi(2k+1)$; f) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$;g) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$.

3. . a) $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$

b) $x = \frac{\pi}{6}(2k+1),\ x = k\frac{\pi}{2},$ c) $x = k\pi + \frac{\pi}{6}\left[(-1)^k + 1\right],$ d) $x = \pi(2k+1),$

$x = \frac{2\pi}{3}(6k \pm 1),$ e) $x = k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{5}(2k+1)$ f) $x = \frac{\pi}{8}(2k+1),$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,$ g) $x = \pi(2k+1),\ x = \frac{\pi}{2}(4k+1),$ h) $x = 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$

i) $x=k\frac{\pi}{2}$ j) $x=k\pi+\frac{\pi}{4}, x=k\pi,$ k) $x=\frac{\pi}{2}(4k+1), x=\frac{\pi}{6}(2k-1),$

l) $x=2k\pi, x=k\pi+\frac{\pi}{4},$ m) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,$

n) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,$ o) $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$ p) $x=k\frac{\pi}{3},$

q) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=2k\pi, x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$ r) $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}, x=k\pi.$

$s) x=\frac{k\pi}{8}, x=\frac{k\pi}{4}$.

4. a) $\frac{1}{4}\le a\le 1$; b) $0<a\le 2$

6. a) $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{11}{6}\pi+2k\pi$; b) $\frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<\frac{4}{3}\pi+2k\pi$;

c) $k\pi-\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi,$ d) $k\pi+\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi,$

e) $k\pi+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi+k\pi,$ f) $\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{4},$

g) $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5}{4}\pi+2k\pi.$

7. a) $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7}{6}\pi+2k\pi$; b) $k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$.

8. Wskazówka: metoda indukcji matematycznej.

Wybrane zadania maturalne (po roku 2000)

1. Wiedząc, że $0\le\alpha\le 360^o$, $\sin\alpha<1$ oraz $4\text{tg}\,\alpha=3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

a) obliczyć $\text{tg}\,\alpha$,

b) zaznaczyć w układzie współrzędnych kąt α i podać współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

2. a) Naszkicować wykres funkcji $y=\sin 2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

b) Naszkicować wykres funkcji $y=\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$ i zapisać, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}<0$.

3. Rozwiązać równanie $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ w przedziale $\langle -2\pi, \pi \rangle$.

4. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Obliczyć $\cos\alpha$.

5. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Odpowiedzi:

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; 2. b) $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

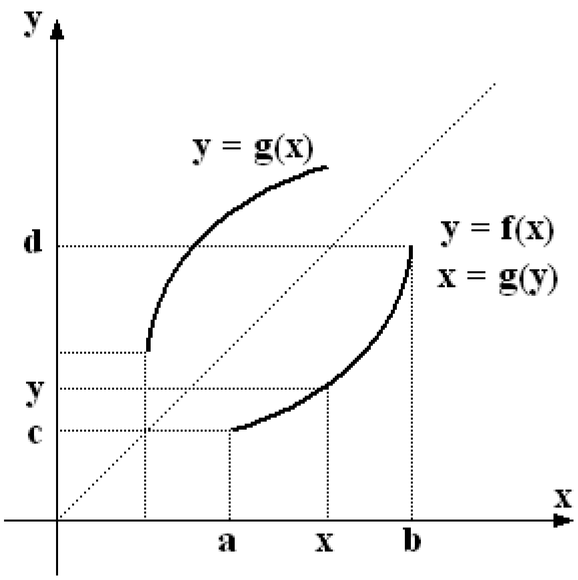
3. $-\frac{5}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}$.

XII. Funkcje cyklometryczne (kołowe)

Funkcja odwrotna

Niech funkcja $y = f(x)$ będzie określona w zbiorze A i niech B będzie zbiorem jej wartości $(f : A \to B)$. Ponadto załóżmy, że funkcja f jest różnowartościowa w zbiorze A (np. f jest ściśle monotoniczna). Wówczas każdej wartości y odpowiada dokładnie jedna wartość x taka, że $f(x) = y$. Oznaczamy tę wartość x przez $g(y)$, wówczas wzór $x = g(y)$ określa w zbiorze B funkcję zmiennej y, którą nazywamy funkcją odwrotną względem funkcji f.

Wykres funkcji odwrotnej $x = g(y)$ jest identyczny z wykresem funkcji danej $y = f(x)$ (rys. 1).



Rys. 11. Konstrukcja wykresu funkcji odwrotnej

Można wykazać, że jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale $< a,b >$, to funkcja do niej odwrotna $x = g(y)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w odpowiednim przedziale $< c,d >$ (rys. 1). Funkcje f i g są względem siebie wzajemnie odwrotne.

Jeżeli we wzorze $x = g(y)$ przestawimy zmienne x i y ze sobą, wówczas ostatecznie funkcja odwrotna jest postaci $y = g(x)$.

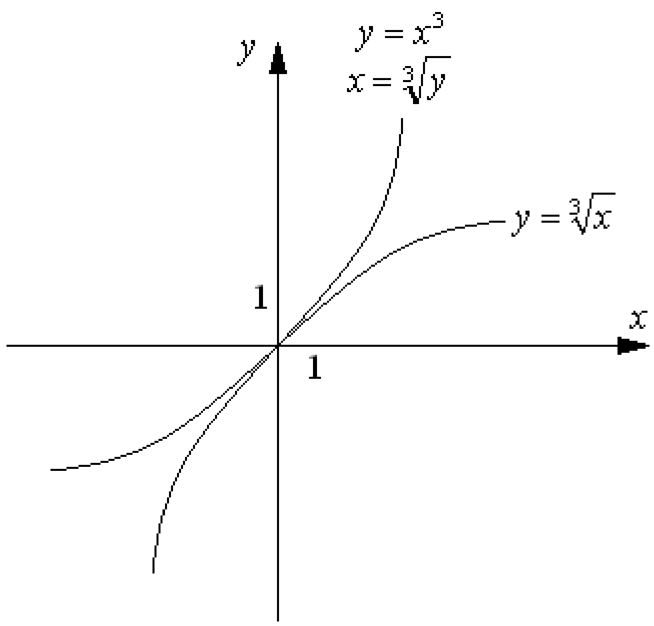
Funkcję odwrotną do funkcji $y = f(x)$ oznacza się również symbolem $y = f^{-1}(x)$.

Wykres funkcji $y = g(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem prostej $y = x$ (rys. 11).

Przykład

Funkcja $y = x^3$ jest różnowartościowa dla $x \in R$. Funkcją odwrotną do niej jest funkcja $x = \sqrt[3]{y}$ (obie mają ten sam wykres, rys. 12).

Po zamianie x z y otrzymujemy ostatecznie funkcję odwrotną do funkcji $y = x^3$ postaci $y = \sqrt[3]{x}$. Oczywiście również funkcja $y = x^3$ jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \sqrt[3]{x}$. Obie funkcje są monotoniczne (funkcje rosnące).



Rys.12. Wykres funkcji odwrotnej do funkcji sześciennej

ZADANIA

1. Wyznaczyć funkcję odwrotną f^{-1} do funkcji f :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in < 1, +\infty)$;

c) $f(x)=\log_x 2$; d) $f(x)=3^x$; e) $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}$;

f) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$, $x\geq 0$.

Odpowiedzi

1. a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x\neq 0$, b) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x},\ x\geq -1$, c) $f^{-1}(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$;

d) $f^{-1}(x)=\log_3 x,\ x>0$; e) $f^{-1}(x)=-\log_2(1-x),\ x\in(0,1)$;

f) $f^{-1}(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1$.

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych nazywamy funkcjami cyklometrycznymi.

Rozpatrzmy funkcję $y=\sin x$ w przedziale $\left\langle -\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, w którym jest ona różnowartościowa (ściśle rosnąca), więc istnieje funkcja do niej odwrotna. Funkcję odwrotną oznaczamy symbolem $x=\arcsin y$ (czytamy arcus sinus y; arcus – łac. łuk) lub ostatecznie po zamianie argumentów *x* z *y*: $y=\arcsin x$, (niekiedy oznaczamy $y=\sin^{-1}x$). Dziedzinę funkcji $y=\arcsin x$ jest przedział domknięty $\langle -1;1\rangle$, natomiast zbiorem wartości przedział domknięty $\left\langle -\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. Z definicji wynika, że $\arcsin x$ jest miarą łukową (łukiem) takiego kąta y, że $\sin y=x$ (rys. 13a). Wykres funkcji $y=\arcsin x$ otrzymujemy odbijając sinusoidę względem prostej $y=x$ (rys. 13a).

Analogiczni definiuje się funkcje odwrotne do funkcji cosinus, tangens i cotangens.

Funkcją odwrotną do funkcji $y=\cos x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$, w którym jest ona malejąca oznaczamy symbolem $y=\arccos x$ (czytamy arcus cosinus x).

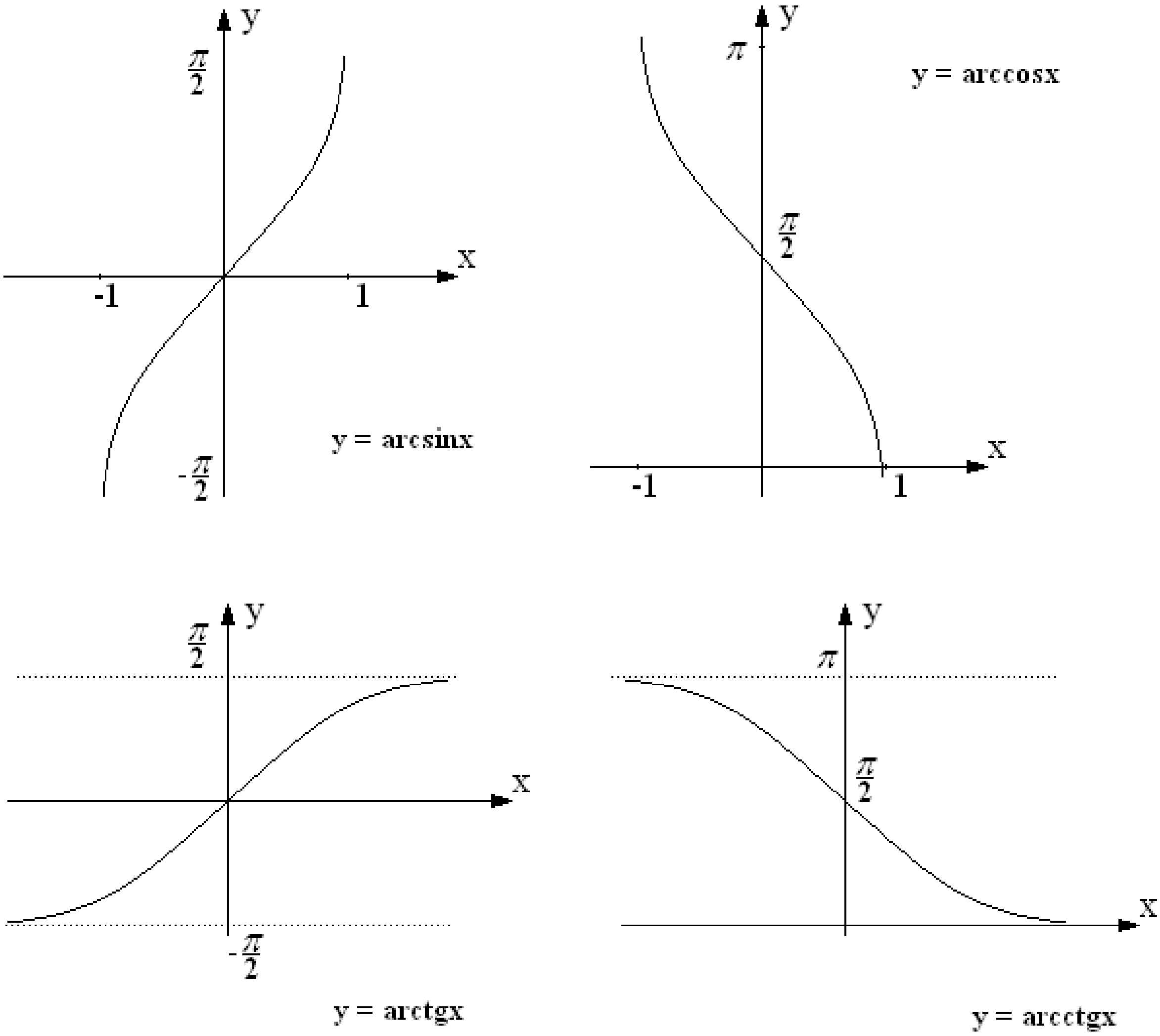
Dziedziną funkcji $y=\arccos x$ jest przedział domknięty $\langle -1;1\rangle$, a zbiorem wartości przedział domknięty $\langle 0,\pi\rangle$.

Wykres funkcji $y=\arccos x$ otrzymujemy analogicznie jak wykres funkcji $y=\arcsin x$ (rys. 13b).

Funkcję odwrotną do funkcji $y=\operatorname{tg} x$ rozpatrywanej w przedziale $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ oznaczamy symbolem $y=\operatorname{arctg} x$ (czytamy arcus tangens x).

Dziedziną funkcji arctgx jest zbiór R, natomiast zbiorem wartości przedział $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (rys. 13c).

Analogicznie symbolem $y = \operatorname{arcctg} x$ (czytamy arcus cotangens x) oznaczamy funkcję odwrotną do funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ rozpatrywaną w przedziale $(0, \pi)$. Dziedziną funkcji $y = \operatorname{arcctg} x$ jest zbiór R, natomiast wartości funkcji należą do przedziału $(0, \pi)$ (rys. 13d).



Rys. 13. Wykresy funkcji cyklometrycznych

Można wykazać, że dla $x \in < -1,1 >$ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ oraz dla $x \in R$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

PRZYKŁADY

1. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $y = f(x) = 2\sin 3x, \ -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$.

2. Wyznaczyć dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji $y = f(x) = \arcsin \frac{4x}{2+x}$.

Rozwiązanie

1. $y=2\sin 3x \Leftrightarrow \frac{y}{2}=\sin 3x \Leftrightarrow 3x=\arcsin\frac{y}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$, stąd po zamianie x z y ostatecznie otrzymamy funkcję odwrotną określoną wzorem $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$ dla $x\in\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$.

2. Z definicji funkcji $y=\arcsin x$ wynika, że $x\in\langle -1;1\rangle$. Stąd zakładamy, że $-1\le\frac{4x}{2+x}\le 1$ i $2+x\neq 0$.

$$-1\le\frac{4x}{2+x}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4x}{2+x}\le 1\\ \frac{4x}{2+x}\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-2}{2+x}\le 0\\ \frac{5x+2}{2+x}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3x-2)(2+x)\le 0\\ (5x+2)(2+x)\ge 0\end{cases} \text{ i } 2+x\neq 0 \Leftrightarrow x\in\left\langle -\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right\rangle.$$

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział domknięty $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

ZADANIA

1. Obliczyć

a) $3\arccos 1-2\arcsin 0+4\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arcctg}(-1)$;

b) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin\left[3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

2. Wyznaczyć dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji f, gdy:

a) $f(x)\arccos\frac{7-4x}{2}$; b) $f(x)=\sin\arcsin 2x$; c) $f(x)=2\arcsin\frac{x}{1+x}$;

3. Udowodnić i ustalić w jakim zbiorze spełnione są następujące tożsamości:

a) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; b) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; c) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

4. Narysować wykresy funkcji:

a) $f(x)=\arccos\frac{x}{2}$; b) $g(x)=3\operatorname{arctg} 3x$; c) $h(x)=1+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$;

d) $k(x)=2\arcsin(x-2)$; e) $l(x)=\arcsin(\sin x)$.

5. Wykazać, że funkcje $y=\arcsin x$ i $y=\operatorname{arctg} x$ są nieparzyste.

6. Wykazać, że:

a) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;

b) $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x$.

Odpowiedzi:

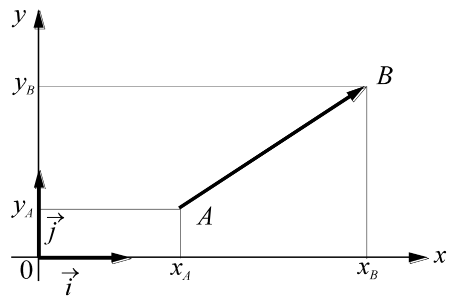
1. a) $\frac{5}{4}\pi$; b) $-\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a) $\left\langle \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right\rangle, \langle 0, \pi \rangle$; b) $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \langle -1,1 \rangle$; c) $(-\infty, -1), \langle -\pi, \pi \rangle$.

XIII. Geometria analityczna

Wektory na płaszczyźnie

Oznaczmy symbolem $\overrightarrow{AB}$ wektor o początku w punkcie *A* (x_A, y_A) i końcu w punkcie *B* (x_B, y_B) (rys. 14).



Rys. 14. Wektor $\overrightarrow{AB}$ na płaszczyźnie kartezjańskiej

Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy różnice współrzędnych końca *B* i początku *A*. Wektor $\overrightarrow{AB}$ o współrzędnych $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ zapisujemy: $\overrightarrow{AB}$ = = [$x_B - x_A$, $y_B - y_A$]. Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczymy symbolem $|\overrightarrow{AB}|$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} .$$

Wektory jednostkowe (o długości równej jeden) osi Ox, Oy oznaczamy odpowiednio $\vec{i}$, $\vec{j}$ i nazywamy wersorami (rys. 14). Wówczas $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

Wektory $(x_B - x_A)\vec{i}$, $(y_B - y_A)\vec{j}$ nazywamy składowymi wektora *AB*.

Niech będą dane dwa wektory $\vec{a} = [a_x, a_y]$, $\vec{b} = [b_x, b_y]$. Mówimy, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współrzędne są równe, tzn.

$$\left(\vec{a} = \vec{b}\right) \Leftrightarrow \left(a_x = b_x,\ a_y = b_y\right)$$

Suma wektorów

1. Współrzędne sumy (różnicy) wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są sumami (różnicami) odpowiednich współrzędnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left[a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y \right]$$

Własności dodawania wektorów

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (przemienność)

2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (łączność)

Wektor $\vec{AB}$ = $[x_B - x_A,\ y_B - y_A]$ nazywamy wektorem zaczepionym (związanym) w punkcie A. Natomiast wektor $\vec{a} = \left[a_x, a_y\right]$ nazywamy wektorem swobodnym (nie znamy jego punktu zaczepienia). Wektor swobodny $\vec{a}$ reprezentuje klasę wektorów równoważnych, mających ten sam kierunek, długość i zwrot. W matematyce zasadniczo działamy na wektorach swobodnych.

Mnożenie wektora przez liczbę

Iloczynem $\lambda \cdot \vec{a}$ dowolnego wektora $\vec{a}$ przez liczbę $\lambda \in R$ nazywamy wektor $\vec{b}$ taki, że

1) wektor $\vec{b}$ jest równoległy do wektora $\vec{a}$ (kierunek)
2) $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ (długość)
3) wektor $\vec{b}$ ma zwrot zgodny z wektorem $\vec{a}$, jeżeli $\vec{a} \neq 0$ i $\lambda > 0$; jeżeli $\lambda < 0$, to zwroty wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są przeciwne.

Uwaga: jeżeli $\vec{a}$ = 0 lub $\lambda = 0$, wówczas $\vec{b}$ jest wektorem zerowym.

Współrzędne iloczynu wektora $\vec{a} = \left[a_x, a_y\right]$ przez liczbę λ są iloczynami współrzędnych wektora $\vec{a}$ przez tę liczbę: $\lambda \vec{a} = \left[\lambda a_x, \lambda a_y\right]$.

Iloczyn skalarny wektorów

Iloczynem skalarnym $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wektora $\vec{a}$ przez wektor $\vec{b}$ nazywamy:

1) liczbę 0, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{a}$ lub $\vec{b}$ jest zerowy;

2) liczbę $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, gdy oba wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są niezerowe, tzn.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Własności iloczynu skalarnego

1. Iloczyn skalarny jest przemienny

$$\bigwedge_{\vec{a}, \vec{b}} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Mnożenie skalarne jest rozdzielne względem dodawania wektorów

$$\bigwedge_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

3. $$\bigwedge_{\lambda,\,\mu}\ \bigwedge_{\vec{a},\vec{b}} (\lambda\vec{a})\cdot\left(\mu\vec{b}\right)=\lambda\mu\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

Iloczyn skalarny $\vec{a}\cdot\vec{a}$ oznaczamy symbolem $\vec{a}^{\,2}$. Z definicji iloczynu skalarnego wynika, że

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$$

czyli $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$, stąd $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Cosinus kąta między wektorami

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ \text{gdzie}\ \varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Twierdzenie

Wektory niezerowe $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru.

Przyjmujemy umownie, że wektor zerowy jest prostopadły do dowolnego wektora. Wówczas równość $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ jest warunkiem prostopadłości dowolnych wektorów

$$(\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0)$$

PRZYKŁADY

1)Obliczyć długość wektora $\vec{a}+\vec{b}$ wiedząc, że $|\vec{a}|=8,\ |\vec{b}|=6$ i $|\vec{a}-\vec{b}|=10.$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru $\vec{u}^{\,2}=|\vec{u}|^2$. Stąd

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$$

czyli

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$$

więc

$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}$$

Z drugiej strony

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{2}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{2}=\vec{a}^{2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{2}=\vec{a}^{2}+\left(\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}\right)+\vec{b}^{2}=$$

$$2\vec{a}^{2}+2\vec{b}^{2}-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}=2\left|\vec{a}\right|^{2}+2\left|\vec{b}\right|^{2}-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}=2\cdot 64+2\cdot 36-100=100$$

Ponieważ

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{2}}$$

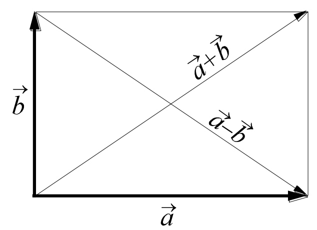
więc

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10$$

Możemy również zauważyć, że dla danych liczbowych podanych w treści przykładu, długości wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$ spełniają warunek

$$\left|\vec{a}\right|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2} \qquad \left(8^{2}+6^{2}=10^{2}\right)$$

Wynika stąd (twierdzenie Pitagorasa), że równoległobok zbudowany na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest prostokątem (rys. 15). Przekątne prostokąta $\vec{p}_1=\vec{a}+\vec{b}$ oraz $\vec{p}_2=\vec{a}-\vec{b}$ mają równe długości, więc $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=10.$



Rys. 15. Suma i różnica wektorów

2)Znaleźć kąt między wektorami $\vec{a}=6\vec{m}+4\vec{n}$ i $\vec{b}=2\vec{m}+10\vec{n}$, jeżeli wiadomo, że $\vec{m}$ i $\vec{n}$ są wektorami jednostkowymi oraz, że $\vec{m}\perp\vec{n}$.

Rozwiązanie

Obliczymy cosinus kąta między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ze wzoru $\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$.

Iloczyn skalarny $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(6\vec{m}+4\vec{n}\right)\left(2\vec{m}+10\vec{n}\right)=12\vec{m}^2+68\vec{m}\cdot\vec{n}+40\vec{n}^2=$

$=12\left|\vec{m}\right|^2+40\left|\vec{n}\right|^2$, ponieważ $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\vec{a}\cdot\vec{b}=52.$ Następnie obliczamy długość wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\left(6\vec{m}+4\vec{n}\right)^2}=\sqrt{36\vec{m}^2+48\vec{m}\vec{n}+16\vec{n}^2}=\sqrt{36\left|\vec{m}\right|^2+16\left|\vec{n}\right|^2}=\sqrt{52}$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{b}^2}=\sqrt{\left(2\vec{m}+10\vec{n}\right)^2}=\sqrt{4\vec{m}^2+40\vec{m}\cdot\vec{n}+100\vec{n}^2}=\sqrt{4\left|\vec{m}\right|^2+100\left|\vec{n}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{104}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{52}$$

Ostatecznie

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{52}{\sqrt{52}\sqrt{2}\sqrt{52}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

stąd

$$\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

3)Znaleźć wektor jednostkowy równoległy do wektora $\vec{a}$.

Rozwiązanie

Oznaczmy szukany wektor symbolem $\vec{a}_1$. Ponieważ wektory $\vec{a}$ i $\vec{a}_1$ są równoległe, więc

$$\vec{a}_1=\lambda\vec{a}$$

Załóżmy ponadto, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{a}_1$ mają te same zwroty, więc $\lambda>0$

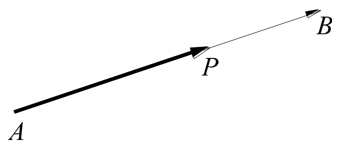
$$\left|\vec{a}_1\right|=\lambda\left|\vec{a}\right|=1$$

stąd

$$\lambda=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\quad\text{czyli}\quad\vec{a}_1=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$$

4)Dany jest wektor $\vec{AB}=\left[x_B-x_A,\,y_B-y_A\right]$. Znaleźć punkt *P*(*x*, *y*) dzielący wektor $\vec{AB}$ w stosunku $k\neq-1.$

Rozwiązanie



Rys. 16. Podział wektora na części

$$\vec{AP} : \vec{PB} = k, \quad \vec{AP} = k\,\vec{PB}.$$

Stąd $\left[x - x_A,\, y - y_A\right] = \left[k(x_B - x), k(y_B - y)\right] \Leftrightarrow x - x_A = k(x_B - x),\ \ y - y_A = k(y_B - y)$

Rozwiązując ostatnie równania otrzymujemy:

$$x = \frac{x_A + kx_B}{1+k}, \qquad y = \frac{y_A + ky_B}{1+k}.$$

Dla $k = 1$ punkt $P(x,\ y)$ jest środkiem odcinka AB. Współrzędne punktu P są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Postać kartezjańska iloczynu skalarnego

Niech będą dane wektory $\vec{a} = \left[a_x,\ a_y\right]$ oraz $\vec{b} = \left[b_x,\ b_y\right]$.

Iloczyn skalarny wyrażony za pomocą współrzędnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest postaci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_x b_x + a_y b_y = 0.$$

Wzór na cosinus kąta dwóch wektorów jest postaci

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Znając cosinus kąta między wektorami możemy znaleźć wartość sinusa tego kąta. Niech $0 \le \varphi \le \pi$, wówczas:

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \ \text{ oraz } \ \sin\varphi = \frac{\left|a_x b_y - a_y b_x\right|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Dla dowolnego kąta skierowanego φ: $\sin\varphi = \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$.

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe, gdy $\sin\varphi = 0$.

Twierdzenie

Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_x b_y - a_y b_x = 0$$

$$\left(\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_y - a_y b_x = 0\right)$$

Po przekształceniu otrzymujemy $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$.

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są więc równoległe, gdy ich odpowiednie współrzędne są proporcjonalne.

ZADANIA

1. Dla jakich wartości parametru *t* kąt między wektorami $\vec{a} = [1,\ 2t]$ i $\vec{b} = [-2t^2,\ 1]$ jest: a) ostry, b) prosty, c) rozwarty?
2. Obliczyć długość wektora $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ wiedząc, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzą kąt $\frac{\pi}{3}$ oraz $|\vec{a}| = 3,\ \ |\vec{b}| = 4.$
3. Punkty *A* (1, 1), *B* (4, 2), *C* (3, 5) są wierzchołkami równoległoboku *ABCD*. Obliczyć współrzędne wierzchołka *D*.
4. Dane są 3 punkty *A* (1, –2), *B* (2, 4), *C* (0, 3). Obliczyć kąt między środkowymi boków *AB* i *BC* trójkąta *ABC*.
5. Obliczyć długość wektora $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ wiedząc, że $|\vec{a}| = 1,\ \ |\vec{b}| = 2$ oraz $\vec{a} \perp \vec{b}$.
6. W trójkącie *ABC* długości boków wynoszą: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 5,\ \ |\overrightarrow{AC}| = 6.$ Obliczyć: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.
7. Dane są niezerowe wektory $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$, przy czym $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$. Znaleźć miarę kąta *AOB*.
8. Dane są wektory $\vec{a} = [1,\ 3]$ i $\vec{b} = [-2,\ 1]$. Znaleźć wektor $\vec{x}$ prostopadły do wektora $\vec{a}$ i taki, że $\vec{b}\cdot\vec{x} = 7$.
9. Dla jakich wartości $a \in R$ wektory $\vec{x} = \log a \cdot \vec{u} + \log(a+2)\cdot\vec{v}$ i $\vec{y} = \vec{u} + \vec{v}$ są prostopadłe, jeżeli $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2,\ \ (\vec{u},\ \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$.
10. Znaleźć rzut wektora $\vec{a} = -\vec{m} - 2\vec{n}$ na oś o kierunku wektora $\vec{b} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$, jeżeli wiadomo, że $\vec{m}$ i $\vec{n}$ są wektorami jednostkowymi i $\vec{m} \perp \vec{n}$.

11. Wektor $\vec{b}$ jest równoległy do wektora $\vec{a} = [-4{,}3]$. Wiedząc, że $|\vec{b}| = 10$, wyznaczyć jego współrzędne.

Odpowiedzi

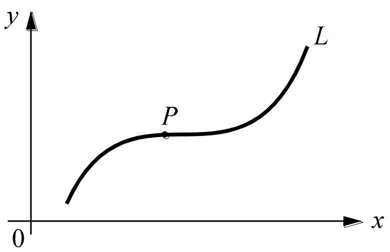
1. a) $0 < t < 1$, b) $t = 0$ lub $t = 1$, c) $t < 0$ lub $t > 1$. 2. $|\vec{c}| = 5$. 3. $D\,(0, 4)$.

4. $\cos\varphi = \frac{1}{5}$. 5. $|\vec{x}| = \sqrt{5}$. 6. 43. 7. $\frac{5}{6}\pi$. 8. $\vec{x} = [-3,\ 1]$. 9. $a = -1 + \sqrt{2}$.

10. $-\frac{\vec{b}}{4}$, 11. $[8,-6]$.

Prosta na płaszczyźnie

Niech na płaszczyźnie Oxy będzie dana pewna linia L (prosta, krzywa) oraz równanie z dwiema niewiadomymi x, y o postaci $F(x, y) = 0$

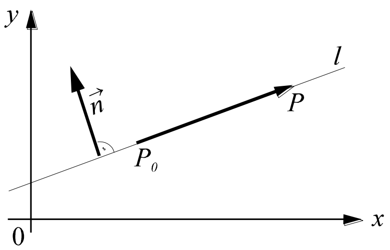


Rys. 17. Linia krzywa na płaszczyźnie kartezjańskiej

Mówimy, że równanie to jest równaniem linii L, jeżeli spełnione są dwa następujące warunki:

1. Współrzędne dowolnego punktu P spełniają równanie linii L.
2. Każde dwie liczby x_0, y_0 spełniające $F(x, y) = 0$ są współrzędnymi punktu $P_0(x_0, y_0)$ leżącego na linii L.

Równanie ogólne prostej



Rys. 18. Linia prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej

Niech na płaszczyźnie Oxy będzie dana prosta l. Ponadto załóżmy, że dane są punkt $P_0(x_0, y_0)$ leżący na prostej l oraz niezerowy wektor $\vec{n} = [A,\ B]$ do niej prostopadły. Ponieważ $\vec{n}$ jest wektorem niezerowym, więc co najmniej jedna ze współrzędnych A, B jest różna od zera. Warunek ten jest równoważny nierówności

$$A^2 + B^2 > 0$$

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na prostej l różnym od P_0. Wektor $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0,\ y - y_0]$ jest równoległy do prostej l, więc $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$ (rys. 18). Wynika stąd, że $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, czyli

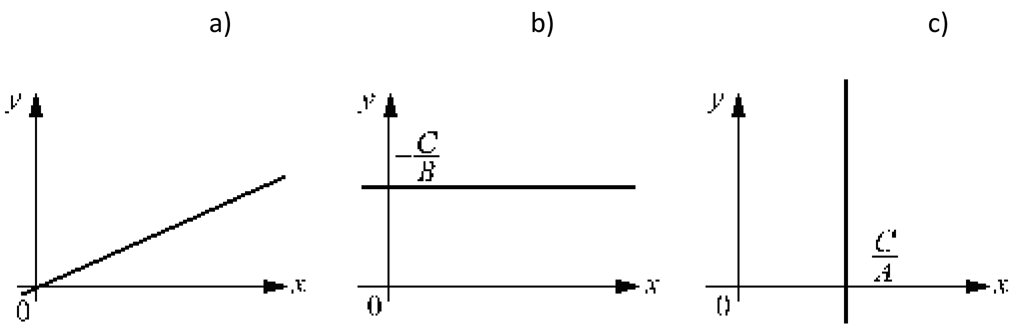
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Oznaczając stałą $(-Ax_0 - By_0)$ symbolem C otrzymujemy równanie

$$Ax + By + C = 0.$$

nazywane równaniem ogólnym prostej.

Przypadki szczególne równania ogólnego prostej



Rys. 19. Graficzne przedstawienie ogólnego równania prostej

1. Niech $C = 0$, wówczas równanie ma postać $Ax + By = 0$ – prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych (rys. 19a).
2. Niech $A = 0$, wówczas równanie przyjmuje postać

   $$By + C = 0 \quad \text{lub} \quad y = -\frac{C}{B}$$

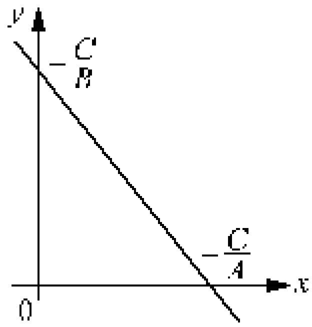
   Wektor $\vec{n} = [0, B]$ jest prostopadły do osi O*x*, a tym samym prosta jest równoległa do osi O*x* (rys. 19 b).
3. Niech $B = 0$, wówczas równanie prostej przyjmuje postać

   $$Ax + C = 0 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{C}{A}.$$

   Wektor $\vec{n} = [A, 0]$ jest prostopadły do osi O*y*, więc prosta jest równoległa do osi O*y* (rys. 19 c).

Równanie odcinkowe prostej

Założmy, że w równaniu ogólnym prostej wszystkie współczynniki A, B, C są różne od zera. Wówczas równanie prostej możemy przedstawić w następującej postaci $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ nazywanej równaniem odcinkowym prostej.



Rys. 20. Graficzne przedstawienie równania odcinkowego prostej

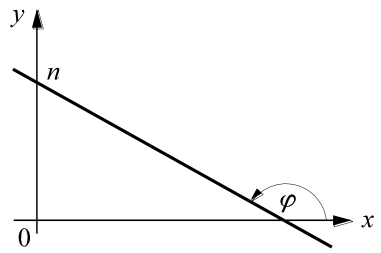
Równanie kierunkowe prostej

Załóżmy, że w równaniu ogólnym współczynnik $B \neq 0$. Wówczas przenosząc składniki nie zawierające *y* na prawą stronę, po podzieleniu stronami przez *B* otrzymujemy

$$B\,y = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

oznaczając $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$ mamy równanie: $y = mx + n$

nazywane równaniem kierunkowym prostej. Prosta ta przecina oś O*y* w punkcie o rzędnej *n* i tworzy z osią O*x* kąt φ (rys. 21), którego tangens równa się *m*. Współczynnik *m* nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.



Rys. 21. Graficzne przedstawienie równania kierunkowego prostej

Przykład

Przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ poprowadzić prostą, która tworzy z osią O*x* kąt, którego tangens równa się *m*.

Rozwiązanie

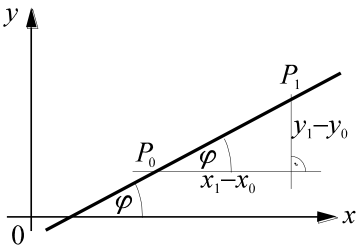
Punkt P_0 leży na prostej, więc mamy: $y_0 = mx_0 + n$

Z otrzymanego równania wyznaczamy *n* i podstawiamy do równania kierunkowego prostej. Szukane równanie prostej przybiera postać

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty

Niech na płaszczyźnie Oxy będą dane dwa różne punkty $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$.



Rys. 22. Graficzne przedstawienie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty

Jeżeli prosta l przechodząca przez punkty P_0 i P_1 nie jest prostopadła do osi Ox ($x_0 \neq x_1$), to możemy obliczyć współczynnik kierunkowy m (rys. 22)

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Podstawiając m do równania kierunkowego prostej otrzymujemy szukane równanie prostej w postaci

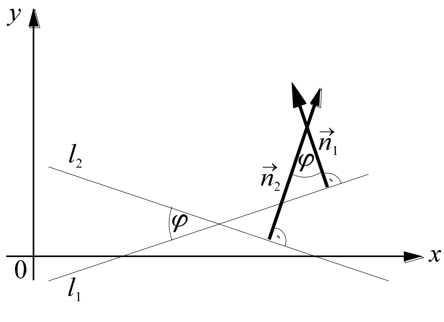
$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right)$$

Jeżeli prosta l jest prostopadła do osi Ox ($x_0 = x_1$), wówczas $x - x_1 = 0$ czyli $x = x_1$.

Kąt między dwiema prostymi

Niech będą dane dwie proste w postaci ogólnej

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \left(A_1^2 + B_1^2 > 0\right) \qquad l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \left(A_2^2 + B_2^2 > 0\right)$$



Rys. 23. Kąt między dwoma prostymi

Proste l_1, l_2 tworzą ze sobą dwie pary kątów (rys. 23) o miarach zawartych między 0 a π. Oznaczymy $\sphericalangle (l_1, l_2) = \varphi$. Ponieważ kąty, których ramiona są wzajemnie prostopadłe, są równe, więc $\sphericalangle (l_1, l_2) = \sphericalangle \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)$. Wynika stąd, że $\cos\varphi = \pm \cos \sphericalangle \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)$. Ze wzoru na cosinus kąta między wektorami otrzymujemy

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Warunek prostopadłości prostych

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$$

1. Niech l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Z warunku prostopadłości wektorów wynika, że $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. Niech l_1: $y = m_1x + n_1$, l_2: $y = m_2x + n_2$.

Proste l_1, l_2 możemy przedstawić w postaci ogólnej $l_1:\ m_1x - y + n_1 = 0,\ l_2:\ m_2x - y + n_2 = 0$.

Wektory prostopadłe do prostych l_1, l_2 mają odpowiednio współrzędne: $\vec{n_1} = [m_1, -1]$ i $\vec{n_1} = [m_2, -1]$

więc

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + 1 = 0$$

lub

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Warunek równoległości prostych

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$$

Z warunku równoległości wektorów wynika, że

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

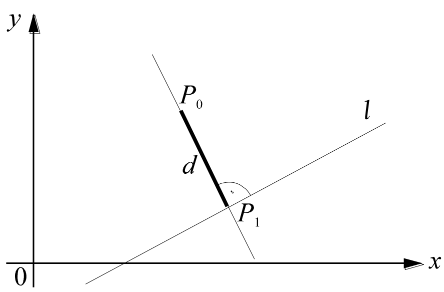
dla prostych w postaci ogólnej, lub

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

dla prostych w postaci kierunkowej.

Odległość punktu od prostej

Niech będzie dany punkt $P_0(x_0, y_0) \notin l$ oraz prosta l: $Ax + By + C = 0$



Rys. 24. Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P_0 od prostej l ($d(P_0, l)$) równa jest odległości punktu P_0 od jego rzutu prostokątnego P_1 na prostą l ($d(P_0, P_1)$), czyli $d = d(P_0, l) = d(P_0, P_1)$.

Odległość punktu P_0 od punktu P_1 $\quad d = d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y - y_1)^2}$.

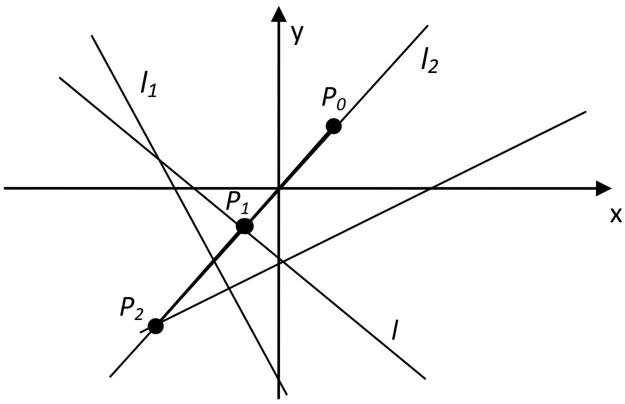
Po podstawieniu do ostatniego wzoru obliczonych współrzędnych punktu P_1 otrzymujemy szukany wzór na odległość punktu od prostej

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

PRZYKŁAD

Napisać równanie prostej, na której leży punkt symetryczny do punktu $P_0(1, 1)$ względem prostej l: $x + y + 1 = 0$, która jest prostopadła do prostej l_1: $y + 2x + 3 = 0$.

Rozwiązanie



Znajdujemy punkt P_1 będący rzutem punktu P_0 na prostą l. Przez punkt P_0 prowadzimy prostą l_2 prostopadłą do prostej l (rys.powyżej). Współczynnik kierunkowy prostej l: $m = -1$, więc współczynnik kierunkowy prostej l_2: $m_2 = 1$. Równanie prostej

$$l_2: \; y - 1 = 1(x - 1) \qquad \text{czyli } y = x$$

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$ otrzymujemy współrzędne punktu P_1: $\quad x = -\frac{1}{2}, \; y = -\frac{1}{2}$.

Współrzędne punktu $P_2(x_2, y_2)$ symetrycznego do punktu P_0 obliczamy ze wzorów

$$\frac{1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad , \qquad \frac{1 + y_2}{2} = -\frac{1}{2}$$

stąd $\quad x_2 = -2$, $y_2 = -2$.

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej l_1: $m_1 = -2$ to współczynnik kierunkowy szukanej prostej l_3: $m_3 = \frac{1}{2}$, równanie szukanej prostej jest postaci

$$l_3:\ y+2=\frac{1}{2}(x+2) \quad \text{czyli } y=\frac{1}{2}x-1.$$

ZADANIA

1. Napisać równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i tworzącej z osią *Ox* kąt $\frac{\pi}{3}$.

2. Dana jest prosta o równaniu ogólnym $3x+5y-2=0$. Przedstawić to równanie w postaci kierunkowej i odcinkowej.

3. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(2,3)$ o współczynniku kierunkowym $m=2$.

4. Napisać równania prostej przechodzącej przez punkt $P(-1,2)$ równoległej do wektora $\vec{a}=[3,5]$.

5. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(2,3)$ i $B(5,-4)$.

6. Dane są punkty $A(4,-7)$, $B(-1,3)$. Punkt C należy do odcinka AB i dzieli ten odcinek w stosunku $3:2$ licząc od punktu A. Obliczyć współrzędne punktu C.

7. Dane są punkty $A(-2,2)$ i $B(4,4)$.

   a) wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B

   b) prosta l oraz prosta o równaniu $9x-6y-26=0$ przecinają się w punkcie C. Obliczyć współrzędne punktu C.

   c) Wyznaczyć równanie symetralnej odcinka AB.

8. Proste o równaniach $x+y+1-0$, $x-y-3=0$, $x+3y-7=0$ zawierają boki trójkąta. Wykazać, że trójkąt jest prostokątny i obliczyć jego obwód.

9. Przez punkt $C(-1,4)$ prowadzimy proste przecinające osie układu współrzędnych w punktach $A(x,0)$ i $B(0,y)$ przy czym $x<0$, $y>0$. Wyznaczyć równanie tej z nich, dla której suma odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.

10. Znaleźć równania dwusiecznych kątów zawartych między prostymi $2x+2y+7=0$, $7x+y-4=0$

11. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 2)$.

12. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $A(-1, -3)$ względem prostej $x + 2y - 2 = 0$.

13. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt (1, 2) i przecinającej krzywą $2y - x^2 = 1$ w punktach symetrycznych względem punktu (1, 2).

14. W trójkącie *ABC* dane są dwa wierzchołki $A(-4, 2)$ i $B(5, -1)$ oraz punkt $M(3, 3)$ przecięcia wysokości tego trójkąta. Obliczyć pole trójkąta *ABC*.

15. Obliczyć współrzędne wierzchołków równoramiennego trójkąta prostokątnego *ABC* o wierzchołku $C(3, -1)$ oraz przeciwprostokątnej *AB* zawartej w prostej o równaniu $3x - y + 2 = 0$.

16. Napisać równania prostych przechodzących przez punkt $A(5, 2)$ w jednakowej odległości od punktów $B(-5, 0)$ i $C(13, -18)$.

17.Dany jest punkt $A(2, 3)$ i prosta l o równaniu $x - y - 1 = 0$. Znaleźć wierzchołki B i C równoramiennego trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych AB i AC tak, aby B należał do prostej l i prosta AC była do niej równoległa.

18.Wyznaczyć kąt między wektorami $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$, mając dane punkty $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(5, 1)$, $D(20, 16)$.

19.Punkty $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(3, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Obliczyć współrzędne wierzchołka D.

20. Napisać równanie symetralnej odcinka AB, mając dane punkty $A(1,4)$, $B(-5, 2)$.

21.Przez punkt $M(3, 2)$ poprowadzić prostą p tak, aby dany punkt M był środkiem odcinka prostej p zawartego między prostymi o równaniach $y = x$ i $y = 2x - 3$.

22.Pole S rombu $ABCD$ wynosi 10. Przeciwległe wierzchołki A i C rombu mają współrzędne $A(1, 1)$, $C(3, 5)$. Znaleźć współrzędne wierzchołków B i D.

23.Jedna z przekątnych kwadratu zawiera się w prostej $x - 2y + 2 = 0$, jeden z wierzchołków kwadratu ma współrzędne $(3, 5)$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków kwadratu.

24.Dany jest zbiór prostych $2y + 2 = m(x - 3)$. Która z prostych należących do zbioru jest:

a) równoległa do prostej $2x - 3y = 5$

b) prostopadła do prostej $x + 2y + 7 = 0$

c) tworzy z prostą $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ kąt $\varphi = \frac{\pi}{3}$

25. Podstawa AB trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC zawiera się w prostej $y - 2x + 5 = 0$, a jego wierzchołek C leży w początku układu współrzędnych. Wyznaczyć:

a) równania prostych zawierających ramiona tego trójkąta,

b) równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedzi:

1. $y = \sqrt{3}x$; 2. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$, $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{5}} = 1$; 3. $y = 2x - 1$; 4. $3x + 5y - 7 = 0$; 5. $y - 3 = -\frac{7}{3}(x - 2)$;

6. $C(1,-1)$; 7. a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$, b) $C\left(6, \frac{14}{3}\right)$,

c) $y = -3x + 6$; 8. $9\sqrt{2} + 3\sqrt{10}$; 9. $y = 2x + 6$;

10. $4x - 8y - 43 = 0, 24x + 12y + 27 = 0$; 11. $\frac{3}{2}$. 12. $\left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$. 13. $y = x + 1$.

14. 30. 15. $A\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $B\left(-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}\right)$. 16. $y = -x + 7$, $y = 11x - 53$.

17. $B(3, 2)$, $C(1, 2)$ lub $C(3, 4)$. 18. $\frac{\pi}{2}$. 19. $D(6, 6)$.

20. $y = -3x - 3$.

21. $3x - 2y - 5 = 0$. 22. $B(4, 2)$, $D(0, 4)$. 23. $(2, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 4)$.

24. a) $y = \frac{2}{3}x - 3$, b) $y = 2x - 7$, c) $2y - 2 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$.

25. a) $y = -3x$, $y = \frac{1}{3}x$, b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Wybrane zadania maturalne (po roku 2000):

1. W rombie $ABCD$ wierzchołki A i C są punktami przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ z prostą o równaniu: $y - x = 0$. Wiedząc, że pole rombu jest równe 8, obliczyć współrzędne wierzchołków B i D oraz długości przekątnych tego rombu.

2. Dany jest punkt $S(0,2)$ oraz prosta l o równaniu $x + 2y + 1 = 0$.

a) Punkt S' jest obrazem punktu S w translacji o wektor $\vec{u} = [7,-1]$. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty S i S' wiedząc, że jego środek należy do prostej l.

b) Bok kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie S i promieniu długości $\sqrt{5}$ zawiera się w prostej l. Obliczyć współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

3. Punkt $A(-5;-2)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, w którym $\overrightarrow{BC} = [10,-2]$.

a) Wyznaczyć współrzędne wierzchołków B i C wiedząc, że środek boku AB ma współrzędne $(-6,-1)$.

b) Obliczyć pole trójkąta ABC oraz napisać równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

c) Obliczyć sumy kwadratów sinusów kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

4. Punkt $A(-2,5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = x + 1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

5. Punkt $S(0,0)$ jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Mając dane współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB} = [4,3]$ i $\overrightarrow{BC} = [6,2]$ wyznaczyć:

a) współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

b) pole równoległoboku,

c) miary kąta ostrego tego równoległoboku.

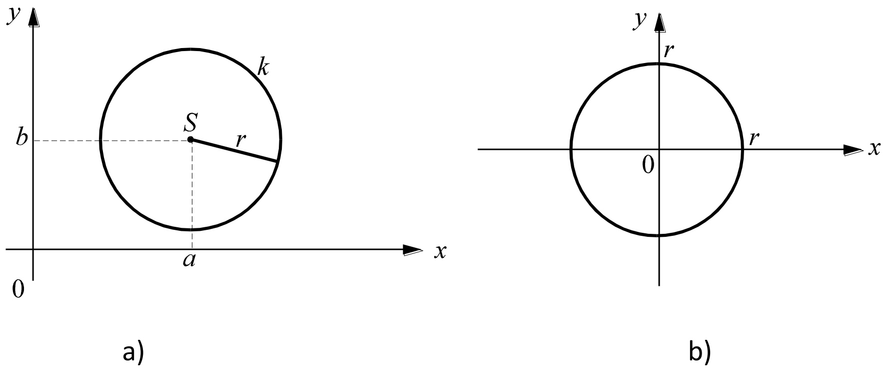
Odpowiedzi:

2. a) $x^2 + (y-2)^2 = 5$; b) $A(-3,1)$, $B(1,-1)$, $C(3,3)$, $D(-1,5)$.

3. a) $B(-7,0)$, $C(3,-2)$; b) 8; c) $\frac{11}{13}$.

Okrąg

Niech na płaszczyźnie O*xy* będzie dany okrąg *k* o środku w punkcie *S*(*a*, *b*) i promieniu *r*, *r* > 0 (rys. 25a).



Rys. 25. Okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na okręgu k. Wówczas odległość tego punktu od S równa się r

$$d(S, P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

stąd

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Załóżmy następnie, że liczby x_0, y_0 spełniają otrzymane równanie, czyli $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$. Wynika stąd, że odległość punktu P_0, o współrzędnych x_0, y_0, od punktu S równa się r, więc punkt P leży na okręgu k. Równanie jest więc równaniem okręgu.

Jeżeli $a = b = 0$, wówczas równanie okręgu przyjmuje postać

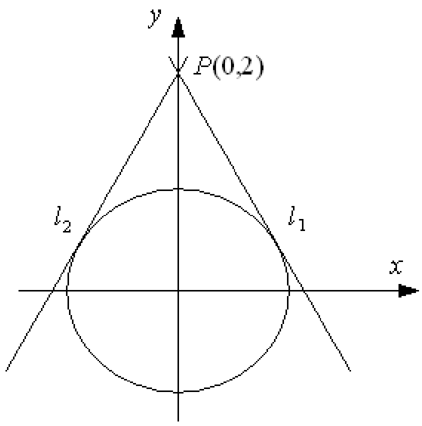
$$x^2 + y^2 = r^2$$

i przedstawia okrąg o promieniu r i środku w początku układu współrzędnych (rys. 25b).

Przykład

Napisać równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 1$ przechodzących przez punkt $P(0,2)$.

Rozwiązanie



Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(0,2)$ o współczynniku kierunkowym m jest postaci

$l: y = mx + 2$

Współczynnik m należy dobrać tak, aby prosta l była styczną do okręgu. Punkty wspólne okręgu i prostej l wyznaczamy rozwiązując układ równań.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = mx + 2. \end{cases}$$

Podstawiając y z drugiego z równań do pierwszego otrzymujemy równanie kwadratowe o niewiadomej x:

$$x^2 + (mx+2)^2 = 1 \Leftrightarrow (m^2+1)x^2 + 4mx + 3 = 0.$$

Ponieważ szukana prosta l ma być styczną do okręgu, ostatnie równanie musi mieć jedno rozwiązanie. Wynika stąd, że wyróżnik Δ tego równania powinien równać się zeru.

$$\Delta = 16m^2 - 4\cdot 3(m^2+1) = 4m^2 - 12$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3} \text{ lub } m = \sqrt{3}$$

Otrzymujemy następujące równania stycznych do okręgu:

$$l_1 : y = -\sqrt{3}x + 2; \ \ l_2 : y = \sqrt{3}x + 2.$$

ZADANIA

1. Wyznaczyć współrzędne środka S i promień okręgu danego równaniem $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 30 = 0$.

2. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S(3,-4)$ i promieniu $r = 3$.

3. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S(3,-4)$ i przechodzącego przez punkt $P(-1,2)$.

4. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S(-5,2)$ stycznego do osi OY.

5. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S(2,-3)$ stycznego zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

6. Punkt $A(4,3)$ należy do okręgu O, który jest styczny do prostej l o równaniu $y = 1$ w punkcie $B(2,1)$.

   a) Napisać równanie okręgu O.

   b) Napisać równania stycznych do okręgu O, do których należy punkt $C(0,0)$.

7. Punkty $A(1,3)$ i $C(7,1)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$. Prosta o równaniu $y = x$ jest osią symetrii tego trapezu. Napisać równanie okręgu opisanego na tym trapezie.

8. Dane są proste $l: x - y + 9 = 0$, $k: 3x + 2y - 12 = 0$, $p: x - 2y - 19 = 0$ oraz punkt $P(-4,-4)$.

Punkty A i B należą odpowiednio do prostych k i l oraz $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ i $\overrightarrow{PA} \| p$.
Wyznaczyć równanie okręgu opisanego na trójkącie APB.

9. Napisać równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych i stycznych do okręgu o równaniu $x^2+(y+4)^2=4$.

10. Znaleźć równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2+y^2+2x=0$ i prostopadłych do prostej o równaniu $x+y-1=0$.

11. Okrąg o środku w punkcie $P(-3,-4)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2+y^2+12x+16y=0$. Znaleźć równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Odpowiedzi

1. $S(5,-3),\ r=4$; 2. $(x-3)^2+(y+4)^2=9$; 3. $(x-3)^2+(y+4)^2=40$;

4. $(x+5)^2+(y-2)^2=25$; 5. $(x-2)^2+(y+3)^2=16$; 6. a) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$;

b) $x=0$, $5x-12y=0$; 7. $(x-5)^2+(y-5)^2=20$; 8. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{125}{4}$;

9. $\sqrt{3}x+y=0,\ \sqrt{3}x-y=0$; 10. $y=x+\left(1\pm\sqrt{2}\right)$; 11. $y=4\sqrt{\frac{2}{x}}x\pm2\sqrt{\frac{77}{5}},\ y=-4\sqrt{\frac{2}{5}}x\pm2\sqrt{\frac{77}{5}}$.