Podstawowe pojęcia

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie postaci

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$, która spełnia to równanie tożsamościowo.

Rzędem równania różniczkowego nazywamy rząd najwyższej pochodnej szukanej funkcji występującej w tym równaniu. Jeżeli funkcja *F* występująca w równaniu różniczkowym jest wielomianem stopnia *k* zmiennych $y, y', \dots, y^{(n)}$, to liczbę *k* nazywamy **stopniem** równania różniczkowego.

Całką ogólną (rozwiązaniem ogólnym) równania różniczkowego rzędu *n* nazywamy funkcję $y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, która zależy od *n* dowolnych wzajemnie niezależnych stałych $c_1, c_2, ..., c_n$ taką, że przyjmując dowolne stałe wartości $c_1, c_2, ..., c_n$ otrzymamy wszystkie znajdujące się w danym obszarze krzywe całkowe i wyłącznie te krzywe.

Nadając występującym w całce ogólnej stałym $c_1, c_2, ..., c_n$ określone wartości otrzymujemy **całkę szczególną** (rozwiązanie szczególne) równania różniczkowego.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

Równaniem **o zmiennych rozdzielonych** nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$P(y)y' = Q(x),$$

gdzie *P*, *Q* są funkcjami o argumentach *y* oraz *x* (odpowiednio) ciągłymi w pewnych przedziałach.

Rozwiązanie ogólne (całkę ogólną) znajdujemy całkując obie strony równania

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx$$

, stąd

$$\varphi(y) = \psi(x) + C$$

(rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej).

Równanie jednorodne

Równaniem **jednorodnym** nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gdzie *f* jest funkcją ciągłą ilorazu $\frac{y}{x}$ w pewnym przedziale.

Stosujemy podstawienie: $\frac{y}{x} = u$, stąd $y = ux$ oraz $y' = u'x + u$. Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych o nowej funkcji niewiadomej *u*

$$\frac{1}{f(u) - u} \cdot u' = \frac{1}{x}$$

przy założeniu $x \neq 0$, $f(u) - u \neq 0$.

Równanie liniowe

Równanie postaci

$$y' + p(x)y = f(x)$$

$p(x), f(x)$ – funkcje ciągłe w pewnym przedziale nazywamy równaniem różniczkowym **liniowym rzędu pierwszego**.

Jeżeli $f(x) = 0$, wówczas równanie (o zmiennych rozdzielonych)

$$y' + p(x)y = 0$$

nazywamy równaniem różniczkowym **liniowym jednorodnym**.

Metoda uzmienniania (wariacji) stałej

1) Znajdujemy rozwiązanie ogólne (całkę ogólną) równania liniowego jednorodnego

$$y = \mathrm{C}e^{-P(x)}$$

gdzie $P(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $p(x)$ $\left(P'(x) = p(x)\right)$.

2) Uzmienniamy stałą C

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}(x)$$

Znajdujemy funkcję $\mathrm{C}(x)$, dla której funkcja

$$y = \mathrm{C}(x)e^{-P(x)}$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego niejednorodnego.

Metoda przewidywań (metoda współczynników nieoznaczonych)

Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego jest postaci

$$y = y_0 + \overline{y}$$

gdzie y_0 jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego jednorodnego, natomiast $\overline{y}$ jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania liniowego niejednorodnego.
Jeżeli równanie liniowe niejednorodne jest postaci

$$y' + \mathrm{p} \cdot y = f(x)$$

p – stała

oraz funkcja $f(x)$ jest wielomianem, funkcją postaci $e^{\alpha x}$, $a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$ sumą (kombinacją liniową) lub iloczynem tych funkcji, wówczas przewidujemy rozwiązanie szczególne $\overline{y}$ analogicznej postaci.

Równaniem Bernoulliego nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$$

gdzie $\alpha \in R$ oraz *p, f* są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale.
Dla $n = 0 \text{ lub } n = 1$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe.
Stosujemy podstawienie

$$y^{1-\alpha} = z \quad (\text{dla } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$$ stąd $$y' = \frac{1}{1-\alpha} z' .$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe o nowej funkcji niewiadomej *z*

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x)z = f(x)$$

Równanie zupełne

Równanie postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

gdzie funkcje *P(x, y)* i *Q(x, y)* mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w obszarze jednospójnym oraz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

nazywamy równaniem różniczkowym **zupełnym**.

Inne równania

Równanie Lagrange'a (czyt. lagranża):

$$y = f_1(y')x + f_2(y')$$

Równanie Clairauta (czyt. klero):

$$y = y'x + f(y')$$

Równanie Ricattiego (czyt. rikatiego):

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Szczególne przypadki równań rzędu drugiego

1.Równanie postaci

$$y'' = f(x)$$

Równanie to rozwiązujemy za pomocą dwukrotnego całkowania prawej strony

$y' = \int f(x)dx = \varphi(x) + C_1$, stąd $y = \int (\varphi(x) + C_1)dx = \psi(x) + C_1 x + C_2$,

czyli

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

2. Równanie postaci $y'' = f(x, y')$

Równanie to nie zawiera w sposób jawny *y*. Stosujemy podstawienie $y' = p$, stąd $y'' = p'$. Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu o niewiadomej funkcji $p = p(x)$

$$p' = f(x, p)$$

3. Równanie postaci $y'' = f(y, y')$

Równanie to nie zawiera w postaci jawnej zmiennej niezależnej *x*. Stosujemy podstawienie

$$y' = p, \quad p = p(y)$$

stąd

$$y'' = p'_x = p'_y \cdot y' = p \cdot p'_y$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu o niewiadomej funkcji $p = p(y)$

$$p \cdot p'_y = f(y, p)$$

Liniowe jednorodne równania rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Równanie postaci $y'' + ay' + by = 0$, $a, b \in R$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Szukamy rozwiązań równania postaci $y = e^{rx}$ (r – stała). Po podstawieniu $y,\ y',\ y''$ otrzymujemy **równanie** (liczbowe) **charakterystyczne**:

$$r^2 + ar + b = 0$$

1. Jeżeli $\Delta = a^2 - 4b > 0$, wówczas rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest postaci

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

gdzie r_1, r_2 są różnymi pierwiastkami równania charakterystycznego, a C_1, C_2 dowolnymi stałymi.

2. Jeżeli $\Delta = 0$, wówczas rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest postaci

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$$

gdzie r_0 jest pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego, a C_1, C_2 dowolnymi stałymi.

3. Jeżeli $\Delta < 0,$ wówczas rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest postaci

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin\beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos\beta x$$

gdzie $\alpha = \mathrm{re}\, r$, $\beta = \mathrm{im}\, r$, $r = \alpha + \beta i$, r jest jednym z pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego, C_1, C_2 są dowolnymi stałymi.

Przykład 1

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

stąd równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

którego pierwiastkami są:

$$r_1 = -4,\ r_2 = 1$$

mamy więc dwa rozwiązania szczegółowe:

$$y_1 = e^{-4x} \text{ i } y_2 = e^{x}$$

i rozwiązanie ogólne:

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = C_1\, e^{-4x} + C_2\, e^{x}$$

Przykład 2

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$

stąd równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 8r + 25 = 0$$

dla którego

$$\Delta = -36,\ \sqrt{\Delta} = 6i$$

i pierwiastkami są:

$$r_1 = -4 - 3i,\ r_2 = -4 + 3i$$

stąd: $\alpha = -4$ i $\beta = 3$

mamy więc dwa rozwiązania szczegółowe:

$$y_1 = e^{-4x} \sin 3x \text{ i } y_2 = e^{-4x} \cos 3x$$

i rozwiązanie ogólne:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-4x} \sin 3x + C_2 e^{-4x} \cos 3x$$

Liniowe niejednorodne równania rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Równanie postaci:

$$y'' + ay' + by = f\left(x\right)$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym rzędu drugiego o stałych współczynnikach.

1) Metoda przewidywań (metoda współczynników nieoznaczonych)
Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego jest postaci

$$y = y_0 + \overline{y}$$

gdzie y_0 jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego jednorodnego, natomiast $\overline{y}$ jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania liniowego niejednorodnego.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest wielomianem, funkcją postaci $e^{\alpha x}\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right)$, sumą (kombinacją liniową) lub iloczynem powyższych funkcji, wówczas przewidujemy rozwiązanie szczególne $\overline{y}$ analogicznej postaci.

2) **Metoda uzmienniania** (wariacji) **stałych**

a. Znajdujemy rozwiązanie ogólne (całkę ogólną) równania liniowego jednorodnego, które jest postaci

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

b. Uzmienniamy stałe C_1, C_2

$$C_1 = C_1(x), \qquad C_2 = C_2(x)$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

znajdujemy funkcje $C_1(x), C_2(x)$, dla których $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego niejednorodnego.

Równaniem różniczkowym jednoparametrowej rodziny krzywych płaskich $\Re$ nazywamy równanie różniczkowe, dla którego rodzina $\Re$ jest rodziną wszystkich krzywych całkowych (rozwiązanie ogólne). Aby otrzymać równanie różniczkowe rodziny $\Re$ różniczkujemy równanie $F(x, y, C) = 0$ względem *x*, a następnie rugujemy parametr *C* z układu równań:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F'_x(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\Phi(x, y, y') = 0 .$$

$y = x^2 + C$
$x^2 + C – y = 0$
$2x + 0 – y' = 0$ stąd $y' = 2x$

Trajektorią izogonalną jednoparametrowej rodziny krzywych $\Re$ nazywamy krzywą płaską, która przecina każdą krzywą rodziny pod tym samym kątem α. Jeżeli α jest kątem prostym, wówczas trajektorię izogonalną nazywamy **trajektorią ortogonalną.**

Aby otrzymać **równanie trajektorii ortogonalnych**, w równaniu różniczkowym rodziny $\Re$ podstawiamy za y', $-\frac{1}{y'}$ i otrzymujemy równanie różniczkowe rodziny trajektorii ortogonalnych $\Re^*$

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

którego rozwiązaniem ogólnym jest rodzina trajektorii ortogonalnych $\Re^*$ rodziny $\Re$.

Sposób wyznaczania równania rodziny trajektorii izogonalnych $\left(\Re^*\right)$ rodziny krzywych:

1. Znajdujemy równanie różniczkowe rodziny krzywych $\Re$: $\Phi\left(x, y, y'\right) = 0$.
2. W równaniu różniczkowym $\Phi\left(x, y, y'\right) = 0$ podstawiamy za y' (współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej rodziny $\Re$)

$$\frac{y' \mp m}{1 \pm my'}, \qquad m = \operatorname{tg} \alpha$$

i otrzymujemy równanie różniczkowe trajektorii izogonalnych $\Re^*$:

$$\Phi\left(x, y, \frac{y' \mp m}{1 \pm my'}\right) = 0$$

3. Rozwiązanie ogólne (całka ogólna) otrzymanego równania przedstawia jednoparametrową rodzinę trajektorii izogonalnych $\Re^*$ rodziny $\Re$

$$F^*\left(x, y, C\right) = 0$$

Obwiednią jednoparametrowej rodziny krzywych $\Re$, $F(x, y, C) = 0$ nazywamy krzywą spełniającą warunki:

a) krzywa nie należy do rodziny $\Re$,
b) w każdym swoim punkcie jest styczna do krzywej rodziny $\Re$,
c) jest styczna do każdej krzywej rodziny $\Re$.

Równanie obwiedni rodziny $\Re$ (o ile istnieje) otrzymujemy w wyniku rugowania parametru *C* z układu równań

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F'_c(x, y, C) = 0 \end{cases}$$ (F'_c – pochodna względem c)