Rachunek prawdopodobieństwa I Elementy statystyki

Materiały do ćwiczeń

Lech KASYK

Spis treści

Niniejsze materiały służą do utrwalenia wiadomości wprowadzonych na wykładzie i zawartych w *Materiałach do zajęć audytoryjnych.* Poszczególne rozdziały i układ wyjaśnianych pojęć jest identyczny jak w *Materiałach do zajęć audytoryjnych.* Pozwoli to na jednoczesne korzystanie z obu części. Niniejsze materiały są zbudowane w ten sposób, że dla poszczególnych pojęć rozwiązane są najpierw przykładowe zadania, a następnie jest lista zadań do samodzielnego rozwiązywania.

Rozdział I. Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

Na początek podamy kilka przykładów przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Przykład 1
Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie monetą. Zbiór Ω składa się z 8 zdarzeń elementarnych, którymi są 3-elementowe ciągi (x, y, z), gdzie każdy element tego ciągu oznacza wynik rzutu monetą (*o* lub *r*).

$\Omega = \{(o,o,o), (o,o,r),(o,r,o), (r,o,o), (o,r,r), (r,o,r), (r,r,o), (r,r,r)\}$

Przykład 2

Doświadczenie polega na tym, że trzy kule: białą, czerwoną i zieloną wrzucono „na chybił trafił" do dwóch szuflad oznaczonych cyframi 1 i 2. Każdej z kul możemy przyporządkować liczbę 1 gdy trafi do pierwszej szuflady lub liczbę 2 gdy trafi do drugiej szuflady. Można to zapisać w ten sposób, że zawartość pierwszej szuflady będziemy zapisywać jako pierwszy element dwuwyrazowego ciągu, a zawartość drugiej szuflady jako drugi element tego ciągu. W przypadku pustej szuflady wstawiamy na odpowiednim miejscu kreskę. Mamy więc następującą przestrzeń wyników:

$\Omega = \{(bcz, -),(bc, z), (bz, c), (zc, b), (b, cz), (c, bz), (z, bc), (-, bcz)\}$

Przykład 3

Doświadczenie polega na tym, że z 5 cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 wybieramy losowo 2 i tworzymy z nich liczbę (każdą cyfrę można wykorzystać tylko 1 raz). Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że , że utworzona liczba jest podzielna przez 3.

$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54\}$

$A = \{12, 15, 21, 24, 42, 45, 51, 54\}$

Zadania

1. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – suma wyrzuconych oczek jest większa od 9, B – w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek.
2. Do pociągu, który składa się z 3 wagonów wsiada losowo 3 studentów (P, R, S). Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – w pierwszym wagonie jedzie dwóch studen-

tów, B – w drugim wagonie jedzie co najwyżej 1 student, C – studenci P i S wsiądą do tego samego wagonu.

3. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – suma wyrzuconych oczek jest większa od 9, B – w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek.
4. Trzech studentów (W, X, Y) losuje miejsca w czteromiejscowym rzędzie w samolocie. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – student W siedzi bezpośrednio obok studenta X, B – student X siedzi na lewo od Y.
5. Rzucamy cztery razy monetą. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – za drugim razem wypadł orzeł, B – trzy razy wypadł orzeł.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zajmiemy się najpierw zadaniami, w których można wypisać wszystkie elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Przykład 4
Trzech studentów (X, Y, Z) losuje miejsca w czteromiejscowym rzędzie w samolocie. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – student Y siedzi bezpośrednio obok studenta X, B – student X siedzi na lewo od Z. Oblicz prawdopodobieństwa: P(A), P(B), P(A$\cap$B), P(A$\cup$B).

Rozwiązanie
Pierwszym problemem, z którym należy się uporać to sposób w jaki zapisywać zdarzenia elementarne. Mogą to być różne formy rysunków, schematów, symboli, itp. Tutaj zastosujemy ciągi czteroelementowe o wyrazach: X, Y, Z, P. Miejsce litery odpowiadająca danemu studentowi w ciągu odpowiada miejscu zajmowanemu przez studenta w samolocie. Litera P oznacza miejsce puste. Stad

Ω = {XYZP, XYPZ, XZYP, XZPY, XPYZ, XPZY, YXZP, YXPZ, YZXP, YZPX, YPXZ, YPZX, ZXYP, ZXPY, ZYXP, ZYPX, ZPXY, ZPYX, PXYZ, PXZY, PYXZ, PYZX, PZXY, PZYX}

Jak widać $n(\Omega)$=24.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: XYZP, XYPZ, YXZP, YXPZ, ZXYP, ZYXP, ZPXY, ZPYX, PXYZ, PYXZ, PZXY, PZYX, czyli $n(A)$=12.

Zdarzeniu B sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: XYZP, XYPZ, XZYP, XZPY, XPYZ, XPZY, YXZP, YXPZ, YPXZ, PXYZ, PXZY, PYXZ, czyli $n(B)$=12.

Zdarzeniu A$\cap$B sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: XYZP, XYPZ, YXZP, YXPZ, PXYZ, PYXZ (te które są jednocześnie w A i w B) czyli $n(A\cap B)$=6.

Zdarzeniu A$\cup$B sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: XYZP, XYPZ, YXZP, YXPZ, ZXYP, ZYXP, ZPXY, ZPYX, PXYZ, PYXZ, PZXY, PZYX, XZYP, XZPY, XPYZ, XPZY, YPXZ, PXZY, czyli $n(A\cup B)$=18.

Zgodnie z klasyczną definicja prawdopodobieństwa: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, mamy więc:

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ $P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$

W analogiczny sposób należy rozwiązywać poniższe zadania.

6. Z 6 – osobowej grupy studentów (Polak, Czech, Niemiec, Anglik i dwóch Węgrów) losujemy dwóch studentów. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia i ich prawdopodobieństwa: A – wśród wylosowanych jest Polak; B – wśród wylosowanych jest co najmniej jeden Węgier ; C – wśród wylosowanych nie ma Niemca.
7. Do pociągu, który składa się z 4 wagonów wsiada losowo 2 studentów (P i R). Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – w pierwszym wagonie jedzie dwóch studentów, B – w drugim wagonie jedzie co najwyżej 1 student, C – studenci P i R wsiądą do tego samego wagonu. Oblicz prawdopodobieństwa: P(A), P(B), P(A∩B), P(A∪C).
8. Przy Wałach Chrobrego mają przycumować żaglowce: *Sedov, Dar Młodzieży, Kruzenshtern* i *Lord Nelson.* Kolejność cumowania jest przypadkowa. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że *Sedov* cumuję bezpośrednio za *Darem Młodzieży,* a B to zdarzenie polegające na tym, że *Kruzenshtern* cumuję między *Sedov* i *Lord Nelson*. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia A, B, A∩B, A∪B i ich prawdopodobieństwa.
9. Dwie kule: białą i czerwoną wrzucono „na chybił trafił" do czterech szuflad oznaczonych cyframi 1, 2, 3 i 4. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia: A – w szufladzie nr 5 nie ma kuli czerwonej, B – w szufladzie 4 jest co najwyżej 1 kula. Oblicz prawdopodobieństwa: P(A), P(B), P(A∩B), P(A∪B).
10. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu 3 spośród 4 kartek z cyframi, na których są cyfry: 2, 3, 4, 5 i utworzeniu z nich liczby. Określone są zdarzenia: A – utworzona liczba jest mniejsza niż 253, B – utworzona liczba jest nieparzysta. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia A, B, A∩B, A∪B i ich prawdopodobieństwa.
11. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 4, a B oznacza zdarzenie polegające na tym, że na jednej z kostek (tylko jednej) jest parzysta liczba oczek. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia A, B, A∩B, A∪B i ich prawdopodobieństwa.

Elementy kombinatoryki

W poniższych zadaniach będziemy stosować klasyczny model prawdopodobieństwa, a do wyznaczania ilości zdarzeń elementarnych wykorzystamy wzory na ilość permutacji, kombinacji i wariacji.

Przykład 5

Z 9 osobowej grupy studenckiej, w której jest 3 Japończyków, 2 Francuzów i 4 Polaków, losujemy 5 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenie A, polegającego na tym, że wśród wylosowanych znajduje się co najwyżej 1 Polak?

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega tu na wylosowaniu mniejszego zbioru z większego, czyli mamy tu do czynienia z kombinacjami. Stąd $n(\Omega)=C_9^5=\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!\cdot(9-5)!}=126$. Natomiast dla zdarzenia A trzeba rozpatrzyć dwa warianty, bo wyrażenie „co najwyżej 1 Polak” oznacza, że może to być dokładnie 1 Polak lub może ich nie być wcale, czyli w języku kombinatoryki 0 Polaków. Stąd ilość takich 6 – osobowych grup w których jest 1 Polak obliczamy następująco: $C_4^1\cdot C_5^4$. Pierwsza kombinacja oznacza, że wybieramy 1 Polaka z czterech, którzy są w grupie, druga kombinacja oznacza, że losujemy jeszcze czterech studentów obcokrajowców (bo musi ich być w sumie 5, zgodnie z treścią zadania). Mamy więc $n(A)=C_4^1\cdot C_5^4=20$. Czyli prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $P(A)=\frac{20}{126}\approx 0{,}16$

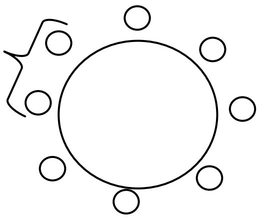
Przykład 6

Wokół okrągłego stołu jest 8 ponumerowanych miejsc. 8 osób losuje miejsca przy tym stole. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie konkretne osoby będą siedzieć obok siebie (zdarzenie B)?

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega tu na usadzeniu 8 osób na 8 miejscach, czyli utworzeniu ciągu 8 – wyrazowego z 8 elementów. Mamy więc tu do czynieni z permutacjami. Stąd $n(\Omega)=P_8=8!=40320$, a dla zdarzenia B mamy: $n(B)=8\cdot P_2\cdot P_6=11520$. Poszczególne czynniki tej liczby oznaczają:

8 – liczba takich miejsc przy stole, gdzie wyróżnione osoby siedzą obok siebie (patrz rysunek);



P_2 – liczba możliwości zajęcia dwóch miejsc obok siebie przez wyróżnione osoby;

P_6 – liczba możliwości zajęcia pozostałych miejsc przez pozostałe 6 osób.

Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia *B* wynosi $P(B)=\frac{11520}{40320}=\frac{2}{7}\approx 0{,}286$.

Przykład 7

Trzy osoby wsiadają losowo do pociągu, składającego się z 7 wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z tych osób odbędzie podróż w innym wagonie (zdarzenie *C*)?

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe polega tu na przyporządkowaniu poszczególnym osobom numeru wagonu do którego wsiądą. Tworzymy więc w tym przypadku ciągi 3 – wyrazowe ze zbioru 7 – elementowego. Ponadto w przestrzeni wyników uwzględniamy te sytuacje, kiedy podróżujący wsiadają do tego samego wagonu. Mamy więc tu do czynieni z wariacjami z powtórzeniami: $n(\Omega)=W_7^3=7^3=343$

Dla zdarzenia C stosujemy wariacje bez powtórzeń: $n(C)=V_7^3=7\cdot 6\cdot 5=210$. Stąd prawdopodobieństwo zdarz C $P(C)=\frac{210}{343}=\frac{30}{49}\approx 0{,}612$.

Zadania

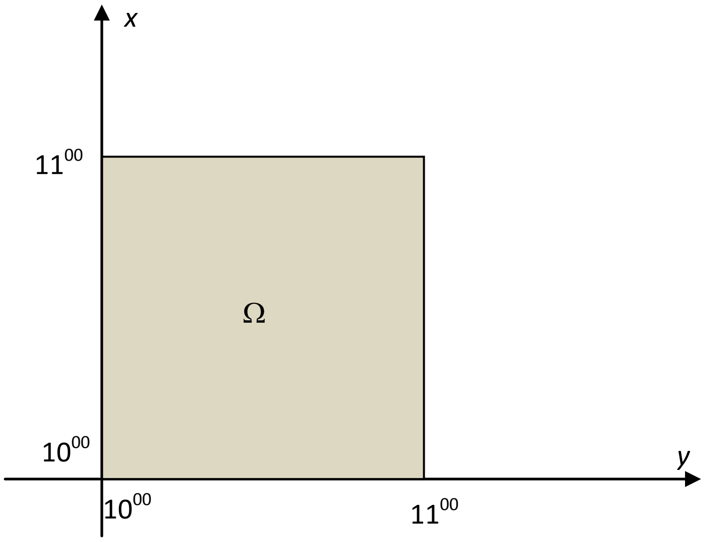
12. Wokół okrągłego stołu jest 10 ponumerowanych miejsc. 10 osób losuje miejsca przy tym stole. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie konkretne osoby będą siedzieć naprzeciw siebie?
13. Losujemy 8 osób z I roku IM (52 studentów). Jakie jest prawdopodobieństwo, że połowa z wylosowanych to studenci I IM C1 (28 studentów)?
14. Na sali jest 12 ławek w 4 rzędach. 12 studentów losuje miejsca na sali. Jakie jest prawdopodobieństwo, że studenci A, B i C będą siedzieli w tym samym rzędzie?
15. Piętnastu studentów losuje miejsce swojej praktyki na jednym z pięciu promów (po 3 studentów na prom). Jakie jest prawdopodobieństwo, że studenci X i Y będą odbywać praktykę na tym samym promie?
16. W 45 osobowej grupie jest 12 Polaków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych 8 osób jest co najwyżej 4 Polaków?
17. Trzy osoby wsiadają losowo do pociągu, składającego się z 5 wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z tych osób odbędzie podróż w innym wagonie?
18. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo dobranej grupie 23 osób, znajdą się co najmniej dwie, które obchodzą urodziny tego samego dnia? (Przyjąć 365 dni w roku).
19. Z 7 cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wybieramy losowo 3 i tworzymy z nich liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 3?
20. Losujemy 5 liczb z 35 (od 1 do 35). Jakie jest prawdopodobieństwo, że 2 z nich są większe od 21?

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa

Przykład 8
Dwa statki przepływają przez kanał w przeciwnych kierunkach. Statek A w kierunku E – W, a statek B w kierunku W – E. Statek A spodziewany jest na wejściu do kanału między godziną 10 a 11. Podobnie statek B, spodziewany jest na wejściu do kanału między godziną 10 a 11. Czas przepłynięcia całego kanału wynosi 15 minut, tak dla jednostki A, jak i B. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia *C*, polegającego na tym, że statki A i B miną się w kanale.

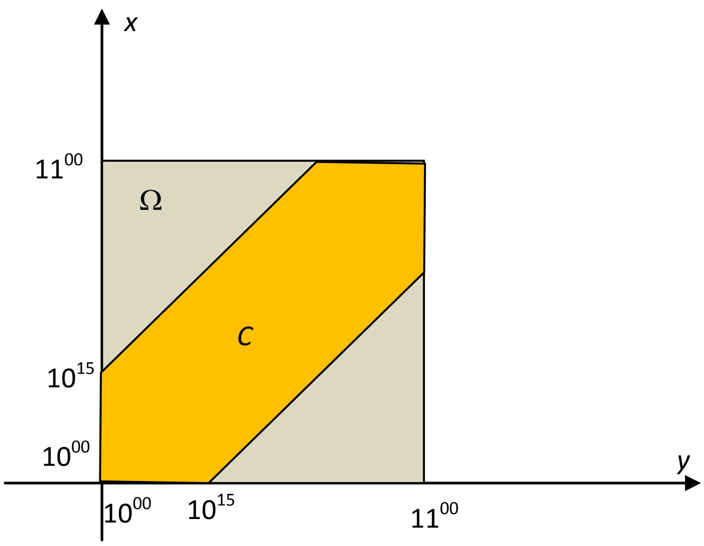
Każdy ze statków może pojawić się na wejściu do kanału w dowolnym momencie między godziną 10 a 11. Stąd przestrzenią wyników jest zbiór par takich momentów czyli
$\Omega=\left\{(t_A,t_B):\text{gdzie } t_A\in\left\langle 10^{00},11^{00}\right\rangle \text{ i } t_B\in\left\langle 10^{00},11^{00}\right\rangle\right\}$

Zbiór ten można przedstawić graficznie w układzie współrzędnych *Oxy*:



Miarą tego zbioru jest pole kwadratu o boku 1, czyli 1 (jednostkę możemy pominąć, jednak należy pamiętać, żeby wszystkie obliczenia wykonywać w tych samych jednostkach, czyli w tym przypadku w godzinach).

Żeby statki spotkały się w kanale drugi statek musi pojawić się na wejściu do kanału maksymalnie 15 minut po wejściu do kanału pierwszego statku, czyli różnica czasów $t_A - t_B$ lub $t_B - t_A$ musi być mniejsza od 15 minut czyli ¼ godziny. Stąd $C = \{(t_A, t_B): \text{gdzie } |t_A - t_B| < 0{,}25\}$. Graficznie przedstawia się to następująco:



Miarą zbioru *C* jest pole sześciokąta, które można obliczyć odejmując od pola całego kwadratu pola dwóch trójkątów poza zbiorem *C*. Są to trójkąty równoramienne prostokątne, których ramiona mają długość 0,75, czyli pole sześciokąta wynosi 0,5625. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia *C* jest równe $P(C) = \frac{mC}{m\Omega} = \frac{0{,}5625}{1} \approx 0{,}56$

Zadania

21. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów pierwiastków równania $x^2+2ax+b=0$ jest większa od 2, jeżeli liczby a i b wybieramy przypadkowo z przedziału $\langle -2,3\rangle$.
22. Wybieramy losowo punkt z kwadratu $\{(x,y):|x|\leq 2 \text{ i } |y|\leq 2\}$, Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt należy do obszaru opisanego nierównością: $y < x^2$.

Własności prawdopodobieństwa

Najczęściej będziemy wykorzystywać wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń czyli następującą własność: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Przykład 9

Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce liczba wyrzuconych oczek jest większa niż 2, a *B* oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma oczek jest podzielna przez 9. Oblicz P($A\cup B$).

Rozwiązanie

$n(\Omega)=W_6^3=6^3=216$, $n(A)=W_4^3=4^3=64$ bo na każdej kostce mamy 4 możliwości

Na zdarzenie *B* będą się składać takie zdarzenia elementarne, dla których suma wyrzuconych oczek wynosi 9 lub 18. Ten drugi wariant zachodzi tylko dla jednego zdarzenia elementarnego: (6, 6, 6). Natomiast suma jest 9, gdy sumujemy 1, 2, 6 lub 1, 3, 5 lub 1, 4, 4 lub 2, 3, 4. Dla pierwszego, drugiego i czwartego zestawu liczb uwzględniamy 6 możliwości uzyskania takich liczb oczek na różnych kostkach. Natomiast dla 1, 4, 4 mamy tylko 3 możliwości: (1, 4, 4), (4, 1, 4) i (4, 4, 1). Stąd
$n(B)=3\cdot 6+3+1=22$

Mamy więc $P(A)=\frac{64}{216}$, $P(B)=\frac{22}{216}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{216}$,bo tylko jedno zdarzenie jest wspólne dla A i B.

Stąd $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{85}{216}$

Zadania

23. Z talii 24 kart wylosowano 4. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych kart znajduje się 1 dama, a *B* oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych kart znajdują się co najmniej 2 piki. Oblicz P($A\cup B$).
24. Z 30 osobowej grupy studenckiej, w której jest 6 Japończyków, 12 Francuzów i 12 Polaków, losujemy 5 osób. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych znajduje się co najmniej 1 Polak, a B oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych znajduje się 2 Europejczyków. Oblicz P($A\cup B$).

Zdarzenia niezależne

Przykład 10

Z talii 24 kart wylosowano 3. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych kart znajduje się 1 dama, a *B* oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych kart znajduje się 1 pik. Sprawdzimy czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne.

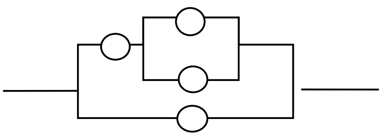
$n(\Omega)=C_{24}^{3}=2024$, $n(A)=C_{4}^{1}\cdot C_{20}^{2}=760$, $n(B)=C_{6}^{1}\cdot C_{18}^{2}=918$. Stąd $P(A)=\frac{760}{2024}$ i $P(B)=\frac{918}{2024}$

Natomiast dla zdarzenia $A\cap B$ trzeba rozważyć dwa warianty, bo zdarzenie $A\cap B$ oznacza, że wśród wylosowanych ma być 1 dama i 1 pik, a możliwa jest tu taka sytuacja, że dama jest jednocześnie pikiem. Dlatego obliczymy najpierw ilość zdarzeń elementarnych dla wariantu, w którym wylosujemy damę niepikową i jakiegoś pika, który nie jest damą i jeszcze jedną kartę, która nie jest ani pikiem, ani damą: $C_{3}^{1}\cdot C_{5}^{1}\cdot C_{15}^{1}=225$. Następnie dla drugiego wariantu, w którym wylosujemy damę pikową i jeszcze dwie karty, która nie są ani pikiem, ani damą, mamy: $C_{1}^{1}\cdot C_{15}^{2}=105$. Stąd $n(A\cap B)=225+105=330$ i $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{330}{2024}$. Żeby stwierdzić niezależność zdarzeń A i B sprawdzamy czy $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

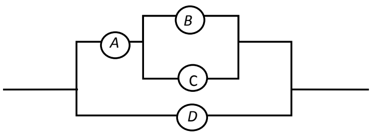
$P(A)\cdot P(B)=\frac{760}{2024}\cdot\frac{918}{2024}=\frac{43605}{256036}$ i nie jest to liczba równa $P(A\cap B)$, dlatego mówimy, że zdarzenia A i B nie są niezależne (raczej nie używamy tu określenia „są zależne”).

Przykład 11

Oblicz niezawodność poniższego układu, przy założeniu, że poszczególne elementy działają niezależnie i niezawodność każdego z nich wynosi *q=0,7.*

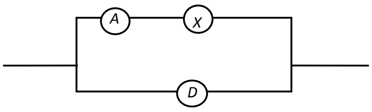


Żeby lepiej wyjaśnić sposób wyznaczania niezawodności układu oznaczymy najpierw poszczególne elementy.

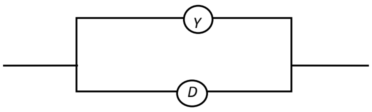


Zaczynamy zawsze od znalezienia dwóch elementów połączonych równolegle lub szeregowo, w tym wypadku są to B i C. Obliczamy niezawodność tego podukładu złożonego tylko z tych dwóch elementów. Oznaczmy ten podukład symbolem X. Stąd prawdopodobieństwo zadziałania podukładu X jest równe $P(X)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C)=0{,}7+0{,}7-0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}91$

Traktując podukład elementów B i C jako jeden element, możemy cały układ przedstawić w nowej postaci:



Dla powyższego układu bierzemy podukład składający się z elementów A i X (oznaczmy go symbolem Y). Jest to układ szeregowy, stąd $P(Y)=P(A\cap X)=P(A)\cdot P(X)=0{,}7\cdot 0{,}91=0{,}637$
Możemy teraz cały układ przedstawić w nowej postaci:



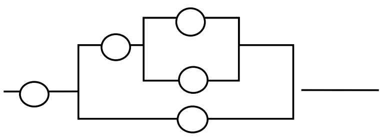
Mamy teraz do czynienia ze zwykłym połączeniem równoległym, więc niezawodność całego układu wynosi: $N=P(Y\cup D)=P(Y)+P(D)-P(Y)\cdot P(D)=0{,}637+0{,}7-0{,}637\cdot 0{,}7=0{,}8911$

Zadania

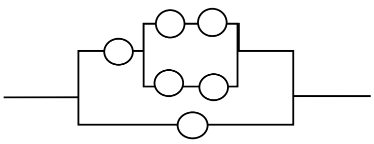
25. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 9, a *B* oznacza zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce jest parzysta liczba oczek. Sprawdź czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne.
26. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wyrzuconych oczek jest podzielny przez 4, a *B* oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wyrzuconych oczek jest nieparzysta. Sprawdź czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne.
27. Samochód przejeżdża przez trzy skrzyżowania z sygnalizacją świetlną niezsynchronizowaną. Prawdopodobieństwo zatrzymania się na skrzyżowaniu wynosi odpowiednio: 0,5 na pierwszym, 0,6 na drugim i 0,8 na trzecim. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że samochód:

a) zatrzyma się tylko na pierwszym skrzyżowaniu;
b) zatrzyma się tylko na trzecim skrzyżowaniu;
c) zatrzyma się tylko na jednym skrzyżowaniu;
d) nie zatrzyma się tylko na pierwszym skrzyżowaniu;
e) nie zatrzyma się tylko na jednym skrzyżowaniu;
f) nie zatrzyma się na żadnym skrzyżowaniu.

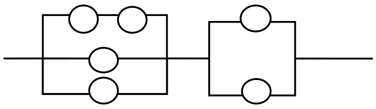
28. Oblicz niezawodność układu, przy założeniu, że poszczególne elementy działają niezależnie i niezawodność każdego z nich wynosi *q=0,9.*



29. Oblicz niezawodność układu, przy założeniu, że poszczególne elementy działają niezależnie i niezawodność każdego z nich wynosi *q=0,7.*



30. Oblicz niezawodność układu, przy założeniu, że przekaźniki działają niezależnie i niezawodność każdego z nich wynosi *q=0,75*



Prawdopodobieństwo warunkowe

Jeżeli $P(A) > 0$, to *prawdopodobieństwem warunkowym* zajścia zdarzenia *B* pod warunkiem zajścia zdarzenia *A* nazywamy liczbę

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Przykład 12

W pewnej stacji meteorologicznej, przez 600 dni prowadzono obserwacje dotyczące poziomu ciśnienia i średniej temperatury w ciągu doby. Poniższa tabela przedstawia liczebności zaobserwowanych zdarzeń. A oznacza zdarzenie: średnia dobowa temperatura była większa niż 10°C (w uproszczeniu: wysoka temperatura). A' to zdarzenie przeciwne do A (w uproszczeniu: niska temperatura). B oznacza zdarzenie: średni poziom ciśnienia w ciągu doby jest większy niż 1000 hPa. B' to zdarzenie przeciwne do B.

	A	A'	suma
B	100	50	150
B'	150	300	450
suma	250	350	600

Wykorzystując częstość zdarzenia do oszacowania jego prawdopodobieństwo, można wyznaczyć prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń. Rozpatrzmy zdarzenie B. Liczba dni, w których zaobserwowano wysokie ciśnienie i w których temperatura była wyższa od 10°C wynosi 100. Natomiast liczba dni, w których zaobserwowano wysokie ciśnienie i w których temperatura była niższa od 10°C wynosi 50. Stąd całkowita liczba dni, w których było wysokie ciśnienie, wynosi 150 i wtedy prawdopodobieństwo P(B)=250/600. Natomiast prawdopodobieństwo tego, że jednocześnie zaobserwowano wysokie ciśnienie i wysoką temperaturę wynosi $P(A\cap B)$= 100/600. Jeżeli rozpatrzymy tylko te 150 dni, w których zaobserwowano wysokie ciśnienie, to jest wśród nich 100, w których temperatura była wyższa od 10°C. Stąd prawdopodobieństwo tego, że temperatura była wyższa od 10°C, pod warunkiem, że zaobserwowano wysokie ciśnienie wynosi 100/150. Jest to prawdopodobieństwo P(A|B) (prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B). Obliczmy jeszcze inne prawdopodobieństwa warunkowe na podstawie powyższej tabeli. P(A|B') = 150/450, bo ograniczamy się tylko do tych dni, w których poziom ciśnienia niski (jest ich 450) i rozpatrujemy te, w których temperatura była wysoka (jest ich 150). P(B|A) = 100/250, bo ograniczamy się tylko do tych dni, w których temperatura była wysoka (jest ich 250) i rozpatrujemy te, w których poziom opadów był wysoki (jest ich 100). Prawdopodobieństwa powyższe możemy również obliczać korzystając z podanego na początku wzoru:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{100}{600}}{\frac{150}{600}} = \frac{100}{150}$$

Zadania

31. Na podstawie poniższej tabeli liczebności, określ prawdopodobieństwa: P(A), P(C), P(D), P(A|D), P(B|A), P(D|A').

	B	C	D
A	100	200	100
A'	150	250	300

32. Na pewnym odcinku Odry zanotowano 400 przejść śródlądowych statków polskich (P) i niemieckich (N). Wśród nich były barki pojedyncze (B) i zestawy barek (Z). Na podstawie poniższej tabeli liczebności wyznacz prawdopodobieństwa warunkowe: P(P|B), P(P|Z), P(N|B), P(B|N) i P(Z|P).

	B	Z
P	40	50
N	160	150

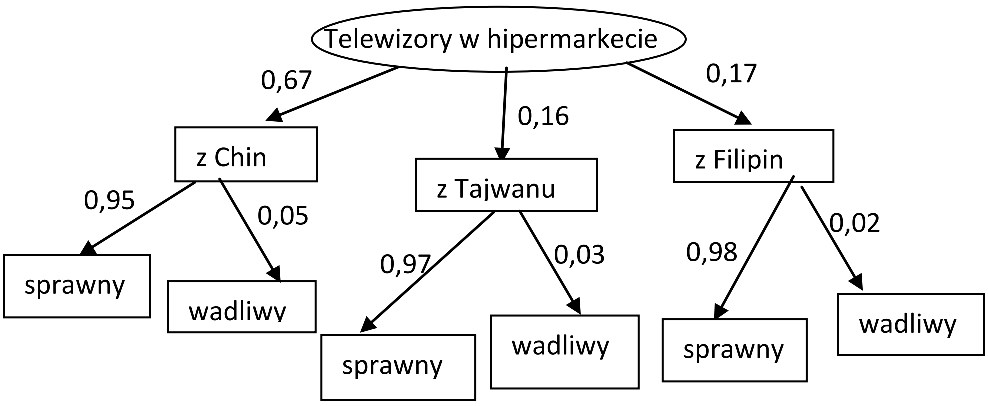
Prawdopodobieństwo całkowite

Przykład 13

W hipermarkecie znajdują się telewizory pochodzące z trzech krajów: 67% z Chin, 16% z Tajwanu i reszta z Filipin. Wady posiada przeciętnie: 5% telewizorów chińskich, 3% tajwańskich i 2% filipińskich. Obliczyć: prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany telewizor nie posiada wad.

Rozwiązanie

Zadanie to można rozwiązać stosując drzewo zdarzeń.



Jeżeli jako S oznaczymy zdarzenie, że wylosowany telewizor jest sprawny, to P(S) obliczymy mnożąc prawdopodobieństwa na poszczególnych „gałęziach" drzewa zdarzeń prowadzących do wyniku „sprawny", a następnie sumując wyniki dla wszystkich takich gałęzi. Mamy więc:

$$P(S) = 0{,}67 \cdot 0{,}95 + 0{,}16 \cdot 0{,}97 + 0{,}17 \cdot 0{,}98 = 0{,}9583$$

Rozwiązanie jest identyczne jeśli rozwiążemy je wg schematu podanego w *Materiałach do zajęć audytoryjnych.*

Zadania

33. W pudełku A znajduje się 5 kul białych i 7 kul czarnych. Wybieramy losowo jedną kulę. Jeżeli wylosujemy kulę białą losujemy ponownie jedną kulę z tego pudełka, a jeżeli wylosowaliśmy kulę czarną, losujemy jedną kulę z pudełka B, w którym znajduje się 7 kul białych i 8 kul czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w drugim losowaniu wybierzemy kulę białą?
34. Na pewnym odcinku toru wodnego możliwy jest ruch dwukierunkowy. Zdarza się on 4 razy rzadziej niż ruch jednokierunkowy. Dla ruchu dwukierunkowego prawdopodobieństwo awarii nawigacyjnej na tym odcinku wynosi 0.003, a dla ruchu jednokierunkowego 0.0005. Wyznacz całkowite prawdopodobieństwo awarii nawigacyjnej na tym odcinku toru wodnego.
35. 10% floty pewnego armatora stanowią chemikaliowce, 34% to masowce, a reszta to kontenerowce. Spośród chemikaliowców połowa to statki starsze niż 20 lat. Spośród masowców 30% to statki starsze niż 20 lat. Natomiast spośród kontenerowców, co czwarty ma powyżej 20 lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany statek tego armatora, ma nie więcej niż 20 lat?

Wzór Bayesa

Przykład 14

Kontynuując Przykład 13, obliczymy teraz prawdopodobieństwo warunkowe tego, że wybrany telewizor został wyprodukowany w Chinach, jeżeli stwierdzono, że posiada wady, czyli $P(\mathrm{Ch}|\mathrm{w})$. Stosujemy tu następujący wzór Bayesa

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Oznacza on, że prawdopodobieństwo „gałęzi" prowadzącej do wyniku „wadliwy" wśród telewizorów pochodzących z Chin, dzielimy przez sumę prawdopodobieństw wszystkich „gałęzi" prowadzących do wyniku „wadliwy". Mamy więc

$$P(\mathrm{Ch}|\mathrm{w}) = \frac{0{,}67 \cdot 0{,}05}{0{,}67 \cdot 0{,}05 + 0{,}16 \cdot 0{,}03 + 0{,}17 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}482$$

Zadania

36. Wiadomo, że ok. 3% społeczeństwa jest nosicielem pewnego wirusa X. Test na obecność tego wirusa w organizmie jest skuteczny w 99%. Jakie jest prawdopodobieństwo warunkowe tego, że osoba, u której test był pozytywny, okazała się zdrowa?
37. W całej populacji kierowców miasta A, 24% stanowią młodzi kierowcy, 48% kierowcy w średnim wieku i reszta w wieku ponad 60 lat. Prawdopodobieństwo spowodowania wypadku przedstawia się w poszczególnych grupach następująco: 15% dla młodych kierowców, 8% dla kierowców w średnim wieku i 9% dla starszych kierowców. Obliczyć prawdopodobieństwo spowodowania wypadku przez kierowcę z miasta A oraz prawdopodobieństwo warunkowe tego, że wybranym pojazdem kierował młody kierowca, jeżeli stwierdzono, że spowodował wypadek.
38. Egzamin z probabilistyki odbywa się w dwóch salach: 169 i 265. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu w sali 169 wynosi 50%, a w sali 265 70%. Student wybiera salę rzucając kostką: jeśli wyrzucona liczba oczek przekracza 4 wchodzi do sali 265, w przeciwnym razie idzie do sali 169. Obliczyć: prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin oraz prawdopodobieństwo warunkowe tego, że wybrany student zdawał egzamin w s. 265, jeżeli wiadomo, że go nie zdał.
39. W całej populacji studentów pewnego miasta, 37% stanowią studenci I roku, 34% studenci ostatniego roku i reszta to pozostali studenci. Prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student I roku jest nieprzygotowany do zajęć wynosi 40%, dla studentów wyższych lat to prawdopodobieństwo wynosi 50%, a dla studentów ostatniego roku 46%. Obliczyć:
    a) prawdopodobieństwo tego, że student jest nieprzygotowany do zajęć;
    b) prawdopodobieństwo warunkowe tego, że wybrany student jest na ostatnim roku, jeżeli stwierdzono, że nie przygotował się do zajęć.

Schemat Bernulliego

Prawdopodobieństwo $P(S_n = k)$ otrzymania $k(0 \le k \le n)$ sukcesów w ciągu *n* prób Bernoulliego określone jest wzorem

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \text{ gdzie } p = P(A), q = P(\overline{A})$$

Przykład 15

Rozpatrzmy doświadczenie losowe polegające na dziesięciokrotnym powtórzeniu rzutu monetą. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że 4 razy wypadnie orzeł. W tym wypadku sukcesem jest wyrzucenie orła, a porażką wyrzucenie reszki. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi $p = \frac{1}{2}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{1}{2}$. Liczba prób to *n*=10, a liczba sukcesów to *k*=4. Z powyższego wzoru wynika więc, że

$$P(S_{10} = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{1024} \approx 0{,}205$$

Zadania

40. Skuteczność koszykarza K przy rzutach osobistych wynosi 90%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na 6 rzutów, co najmniej 4 trafi?

41. Rzucano 7 razy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 2 razy suma wyrzuconych oczek będzie wynosiła co najwyżej 6?
42. Prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu przy czterech niezależnych powtórzeniach tej samej próby Bernoulli'ego wynosi 0,9911. Wyznacz prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie.
43. Wadliwość produkowanych elementów wynosi 0.01. Ile należy pobrać elementów do kontroli, by z prawdopodobieństwem co najmniej 99% trafić na co najmniej 1 wadliwy?
44. Prawdopodobieństwo tego, że danego dnia na torze wodnym Szczecin – Świnoujście będzie duże natężenie ruchu (ponad 25 statków dziennie) wynosi 0,05. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pięciu określonych dniach, przynajmniej 2 razy będzie duże natężenie ruchu?
45. Rzucano 5 razy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej 3 razy suma wyrzuconych oczek będzie wynosiła co najmniej 7?
46. Przeciętnie co czwarty samochód firmy X ma wady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na 6 losowo wybranych samochodów tej firmy, co najmniej 4 mają wady?
47. Strzelec średnio trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,9. Niech X oznacza liczbę strzałów celnych w serii 6 strzałów. Oblicz $P(X > 3)$.

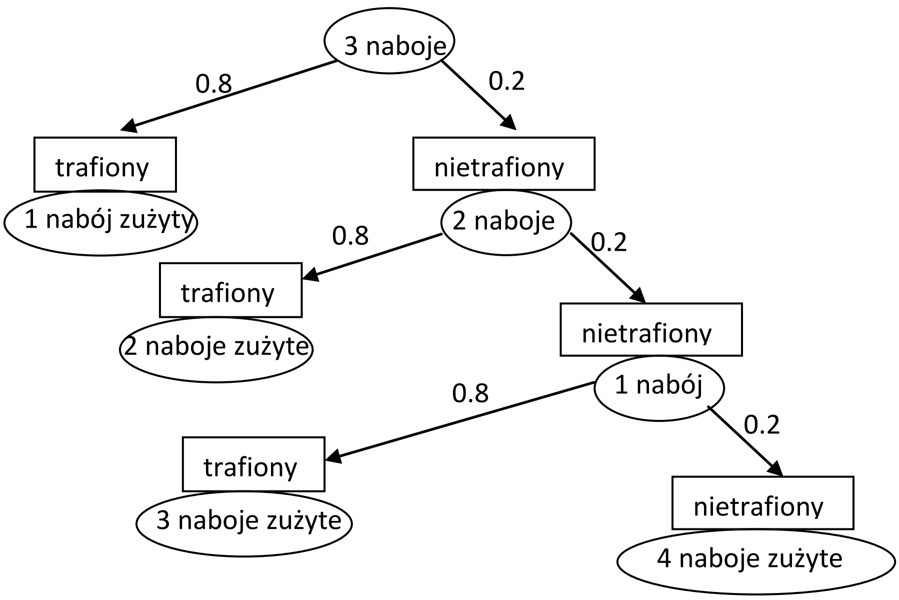
Rozdział II. Zmienne losowe

Zmienna losowa skokowa i jej parametry

Przykład 16

Strzelec trafia do tarczy. Prawdopodobieństwo trafienia w pojedynczym strzale wynosi 0.8. Strzelec posiada 3 naboje, po celnym strzale kończy strzelanie. Niech X oznacza liczbę zużytych naboi. Wyznaczymy rozkład zmiennej losowej X. A następnie jej dystrybuantę, wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe.

Rozpatrzmy drzewo zdarzeń tego doświadczenia:



Liczba zużytych naboi, czyli X może wynosić 1 lub 2 lub 3.

P(X=1) =0,8

P(X=2) = 0,2·0,8 = 0,16

P(X=3) = 0,2·0,2·0,8 + 0,2·0,2·0,2 = 0,04

Stąd rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X jest następujący:

x_i	1	2	3
p_i	0,8	0,16	0,04

Dystrybuanta to prawdopodobieństwo skumulowane, czyli:

dla x ≤ 1, F(x) = 0, (nic nie sumujemy, bo na lewo od jakiegokolwiek x z tego przedziału zmienna nie ma żadnej wartości)

dla 1 < x ≤ 2, F(x) = P(X=1) = p_1 = 0,8, (uwzględniamy tu tylko jedną wartość zmiennej losowej, która jest mniejsza od jakiegokolwiek x z tego przedziału)

dla 2 < x ≤ 3, F(x) = P(X=1)+ P(X=2) = $p_1 + p_2$ = 0,8 + 0,16 = 0,96

dla x > 3, F(x) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = $p_1 + p_2 + p_3$ = 1

Stąd dystrybuanta ma następującą postać:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ dla } x\le 1 \\ 0{,}8 \text{ dla } x\in(1,\,2\rangle \\ 0{,}96 \text{ dla } x\in(2,\,3\rangle \\ 1 \text{ dla } x>3 \end{cases}$$

Wartość oczekiwaną EX obliczamy ze wzoru: $EX=\sum_i x_i p_i$, czyli $EX=1\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}04=1{,}24$

Wariancję obliczamy ze wzoru: $D^2X=E\left(X^2\right)-\left(EX\right)^2$, gdzie $E\left(X^2\right)=\sum_i \left(x_i\right)^2\cdot p_i$

$$E\left(X^2\right)=1^2\cdot 0{,}8+2^2\cdot 0{,}16+3^2\cdot 0{,}04=1{,}8$$

$$D^2X=E\left(X^2\right)-\left(EX\right)^2=1{,}8-\left(1{,}24\right)^2=0{,}2624$$

$$\sigma=\sqrt{D^2X}=\sqrt{0{,}2624}\approx 0{,}51$$

Przykład 17

Niech zmienna losowa X oznacza dzienną liczbę nieobecnych studentów (z jakiejś grupy G) na zajęciach. A jej rozkład prawdopodobieństwa niech będzie następujący:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	p	0,1	0,2

Najpierw wyznaczymy prawdopodobieństwo p. Suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1, stąd p = 0,4. Wartość oczekiwana dziennej liczby nieobecnych studentów wynosi:

$$EX = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = 2{,}1$$

Zadania

48. Dwaj strzelcy oddają po dwa strzały do tego samego celu. Prawdopodobieństwo trafienia w cel przez poszczególnych strzelców jest równe odpowiednio: 0.7 i 0.8. Niech X oznacza ilość strzałów celnych. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, σ oraz F(x).
49. Rzucamy symetryczną monetą do chwili otrzymania pierwszego orła lub trzech reszek. Niech X oznacza liczbę rzutów. Oblicz wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe i dystrybuantę zmiennej X.
50. Pięć maszyn jest ustawionych w linii prostej w ten sposób, że odległości między sąsiednimi maszynami są jednakowe i równe 5m. Robotnik kończy pracę przy jednej z losowo wybranych maszyn i przechodzi z takim samym prawdopodobieństwem do jednej z czterech pozostałych. Niech X oznacza długość drogi, jaką pokonuje robotnik w jednym przejściu. Oblicz wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe i dystrybuantę zmiennej X.
51. Statystyczny student jest przygotowany do zajęć z pr. 0,4. Losujemy 5 studentów do odpowiedzi. Niech X oznacza liczbę studentów nieprzygotowanych do zajęć spośród tych wylosowanych. Podaj rozkład X, F(x), EX.
52. Trzej strzelcy oddają po jednym strzale do tego samego celu. Prawdopodobieństwo trafie¬nia w cel przez poszczególnych strzelców jest równe odpowiednio: 0.7, 0.8 i 0.9. Oblicz wartość oczekiwaną liczby trafień w cel.
53. Prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej 1 sukcesu przy 5 niezależnych powtórzeniach tej samej próby Bernoulli'ego wynosi 0.83193. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie Bernoulli'ego? Wyznacz rozkład tej zmiennej.
54. Zmienna losowa *X* ma następujący rozkład

x_i	-2,3	-1,5	0	0,5	3
p_i	0,1	0,1	0,2	*p*	0,1

Znaleźć *p*. Obliczyć $EX, D^2X, P(X \le 0), P\left(-\frac{3}{2} \le X < \frac{1}{2}\right)$.

55. Zmienna losowa przyjmuje trzy wartości -2, 3, 4. Wiedząc że EX=2,1 i $\sigma = \sqrt{4,29}$ wyznacz rozkład tej zmiennej.
56. Zmienna losowa przyjmuje trzy wartości x_1, x_2, $x_3 = x_1 + x_2$, z prawdopodobieństwami 0.3, 0.4 i 0.3. Wiedząc że EX=1,5 i $\sigma = \sqrt{2,85}$ wyznacz rozkład tej zmiennej.
57. Zmienna losowa *X* ma następujący rozkład

x_i	-23	-13	0	9	40
p_i	0,1	0,1	0,2	p	0,1

Znaleźć *p*. Obliczyć $EX, D^2X, P(X \geq -10), P(-13 \leq X < 40)$.

Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej i ich parametry

Przykład 18

Strzelec średnio trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7. Niech X oznacza liczbę strzałów celnych w serii 4 strzałów. Wyznaczymy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X.

Rozwiązanie

Rozkład zmiennej X jest rozkładem dwumianowym z parametrami p=0,7 i q=0,2. Wartościami tej zmiennej są: 0, 1, 2, 3, 4. Prawdopodobieństwa obliczamy ze wzoru Bernoulliego i otrzymujemy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi: $EX = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$. A wariancja jest równa: $D^2X = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}84$

Przykład 19

Niech zmienna losowa *X* ma rozkład Poissona, z parametrem λ = 2. Wyznaczymy następujące prawdopodobieństwa: $P(X \leq 2)$, $P(X > 6)$, $P(|X-2| > 5)$

Rozwiązanie

$P(X \leq 2) = P(X = 0 \vee X = 1 \vee X = 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = p_1 + p_2 + p_3$, poszczególne prawdopodobieństwa obliczamy ze wzoru: $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Mamy więc: $p_0 = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} \approx 0{,}135$, $p_1 = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \approx 0{,}271$, $p_2 = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \approx 0{,}271$ i wtedy $P(X \leq 2) = 0{,}948$

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$

Obliczając p_3 i p_4 , mamy $P(X > 4) = 1 - (0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 + 0{,}18 + 0{,}09) = 0{,}053$

$P(|X-3| > 2) = 1 - P(|X-3| \leq 2) = 1 - P(-2 \leq x - 3 \leq 2) = 1 - P(1 \leq x \leq 5) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)$

Obliczając p_5 , mamy

$$P(|X-3|>2)=1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5)=1-(0{,}271+0{,}271+0{,}18+0{,}09+0{,}036)=0{,}152$$

Zadania

58. Skuteczność koszykarza K przy rzutach osobistych wynosi 85%. Niech X oznacza liczbę rzutów celnych w serii 5 rzutów. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, oraz F(x).
59. Cztery kule umieszczono w sposób losowy w trzech szufladach, wśród których jedna jest wyróżniona. Niech X oznacza liczbę kul w wyróżnionej szufladzie. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, oraz F(x).
60. Wadliwość małych elementów pewnego urządzenia wynosi 0,003. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na 2000 elementów uszkodzeniu ulegnie co najmniej 3? A jakie, że na 500 elementów uszkodzeniu ulegnie co najwyżej 4? Skorzystaj z rozkładu Poissona, stosując wzór $\lambda=n\cdot p$.
61. Zmienna losowa Y ma rozkład Poissona, z parametrem o wartości 2,5. Wyznacz prawdopodobieństwa: $P(X\le 4)$, $P(X>7)$, $P(|X-2|>5)$.
62. Liczba statków zarejestrowanych przez centralę VTS jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Średnio w ciągu miesiąca jest 300 zgłoszeń. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że a) w ciągu dnia zostaną zarejestrowane 3 statki; b) w ciągu tygodnia będzie co najmniej 70 zgłoszeń?
63. Zmienna losowa Y ma rozkład Poissona, z parametrem o wartości 5. Wyznacz prawdopodobieństwa: $P(Y\ge 3)$, $P(Y\le 5)$, $P(|Y-4|>3)$.
64. Liczba awarii w ciągu miesiąca silnika głównego, na pewnym statku, jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią 3. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba awarii przekroczy 48 w ciągu roku oraz że liczba awarii będzie mniejsza od 6 w ciągu miesiąca?
65. Dzienna liczba rozładowanych statków w porcie A, jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Przeciętnie dziennie rozładowuje się 5 statków Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu tygodnia zostanie rozładowanych co najwyżej 28 statków, a jakie że co najmniej 42?

Zmienna losowa ciągła

Przykład 20

Funkcja $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^2} \text{ dla } x\in\langle 1,4\rangle \\ 0 \quad \text{dla } x\notin\langle 1,4\rangle \end{cases}$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wyznaczymy stałą a, dystrybuantę zmiennej X, jej wartość oczekiwana i wariancję. A następnie obliczymy prawdopodobieństwa: $P(X<2), P(X>3)$.

Rozwiązanie

Z pierwszego warunku na gęstość wynika, że liczba a musi być dodatnia. Z drugiego wynika, że $\int_1^4 \frac{a}{x^2}dx=1$. Rozpatrujemy tylko przedział od 1 do 4, ponieważ poza tym przedziałem funkcja przyjmuje wartość 0, czyli pole pod wykresem jest zerowe. Obliczając tę całkę, otrzymujemy:

$$\int_1^4 \frac{a}{x^2}dx=1\Rightarrow a\int_1^4 x^{-2}dx=1\Rightarrow \left.\frac{-a}{x}\right|_1^4=1\Rightarrow a-\frac{a}{4}=1\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

Dystrybuantę tej zmiennej losowej obliczamy zgodnie ze wzorem : $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Rozważamy trzy przedziały:

1) dla $x\in(-\infty,1\rangle$ mamy $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$

2) dla $x\in(1,4\rangle$ mamy $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dt+\int\limits_{1}^{x}\frac{4}{3t^2}dt=0-\frac{4}{3t}\Big|_1^x=\frac{4}{3}-\frac{4}{3x}$

3) dla $x\in(4,\infty)$ mamy $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dt+\int\limits_{1}^{4}\frac{4}{3t^2}dt+\int\limits_{4}^{\infty}0dt=0+1+0=1$

Stąd dystrybuanta ma następujący wzór:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ dla } x\in(-\infty,1\rangle\\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3x} \text{ dla } x\in(1,4\rangle\\ 1 \text{ dla } x\in(4,\infty)\end{cases}$$

Wartość oczekiwaną obliczamy według wzoru: $EX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$

$$EX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{1}^{4} x\cdot\frac{4}{3x^2}dx=\frac{4}{3}\ln x\Big|_1^4=\frac{4}{3}\ln 4\approx 1,85$$

Żeby obliczyć wariancję obliczymy najpierw $E(X^2)$

$$E\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int\limits_{1}^{4} x^2\cdot\frac{4}{3x^2}dx=\frac{4}{3}x\Big|_1^4=4$$

Stąd $D^2X=E\left(X^2\right)-(EX)^2=4-(1,85)^2\approx 0,58$

Zadania

66. Funkcja $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x^2} \text{dla } x\in\langle 2,6\rangle\\ 0 \quad \text{dla } x\notin\langle 2,6\rangle\end{cases}$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz stałą a oraz oblicz: $P(X<2), P(X<3), P(X>3), P(2.5<X<3.5), P(X<5), P(X>0)$.

67. Funkcja $f(x)=\begin{cases}ax^2 \text{dla } x\in\langle 0,2\rangle\\ 0 \quad \text{dla } x\notin\langle 0,2\rangle\end{cases}$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz stałą a oraz dystrybuantę zmiennej X. Oblicz: $P(X<0), P(X<1), P(X>0.5), P(-0.5<X<0.5), P(X<5), P(X>-3)$.

68. Rozkład czasu pomiędzy zgłoszeniami kolejnych jednostek płynących torem wodnym Szczecin - Świnoujście określony jest następującą funkcją gęstości:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ \frac{1}{58}\cdot e^{\frac{-x}{58}} & \text{dla } x\geq 0\end{cases}$$

a) obliczyć prawdopodobieństwo tego, że czas pomiędzy zgłoszeniami kolejnych statków jest mniejszy niż 75 minut;
b) obliczyć prawdopodobieństwo tego, że czas pomiędzy zgłoszeniami kolejnych statków jest większy niż 30 minut;
c) wyznaczyć dystrybuantę czasu pomiędzy zgłoszeniami.

69. Zmienna losowa X ma rozkład opisany funkcją gęstości $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} & x\leq 0,\\ ce^{-5x} & \text{dla} & x>0,\end{cases}$.

Oblicz: c, EX i σ.

70. Zmienna losowa *X* ma gęstość prawdopodobieństwa podaną wzorem

$$f(x)=\begin{cases}c\cdot\sin x & \text{dla} \quad x\in\langle 0,\pi\rangle,\\ 0 & \text{dla pozostalych x}\end{cases}$$

Wyznacz c, *EX*, σ, F(*x*).

Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej i ich parametry

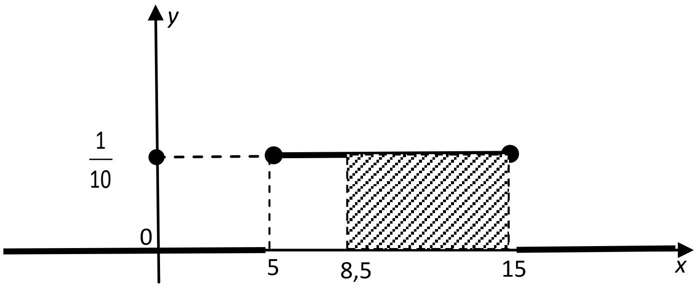
Przykład 21

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale [5; 15]. Wyznaczymy funkcję gęstości rozkładu oraz P(*X* > 8,5), P(*X* < 6). Obliczymy ponadto liczbę *a*, wiedząc, że *P*(*X* < *a*) = 0,3.

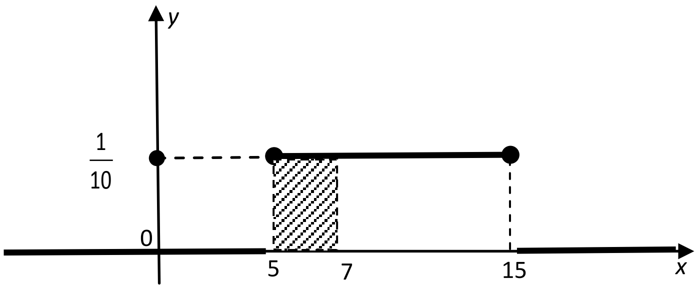
Rozwiązanie

Funkcja gęstości ma postać: $f(x)=\begin{cases}0 & x<5\\ \frac{1}{10} & 5\leq x\leq 15\\ 0 & x>15\end{cases}$

Dla lepszego zrozumienia tego rozkładu dobrze jest naszkicować wykres funkcji gęstości tego rozkładu.



Prawdopodobieństwo P(*X* > 8,5) jest równe polu obszaru zakreskowanego czyli
$P\left(X>8,5\right)=0,1\cdot\left(15-8,5\right)=0,65$



Natomiast $P\left(X<2\right)=0,1\cdot 2=0,2$ (jak widać na rysunku powyżej)

$P\left(X<a\right)=0,1\cdot\left(a-5\right)$ i $P\left(X<a\right)=0,3\Rightarrow\left(a-5\right)=3\Rightarrow a=8$

Przykład 22

Klienci podchodzą do okienka pocztowego średnio, co 300 sekund. Czas oczekiwania na kolejnego klienta jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym – zmienna X. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na klienta jest większy od 4 minut? Z jakim prawdopodobieństwem czas oczekiwania mieści się między 180 s a 7 minut? Oblicz *a* wiedząc, że *P*(*X* < *a*) = 0,7.

Rozwiązanie

Parametrem λ jest średni czas pomiędzy podchodzeniem klientów do okienka pocztowego czyli λ=300s, ale zamieniamy go na minuty i funkcja gęstości ma postać:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}, & x\geq 0\end{cases}$$

Następnie obliczamy odpowiednie prawdopodobieństwa czyli całki:

$$P\left(T>4\right)=1-P\left(T<4\right)=1-\int_0^4\frac{1}{5}e^{\frac{-x}{4}}dx=1-\frac{1}{5}\cdot\left(-5\right)\cdot e^{\frac{-x}{5}}\Big|_0^4=1+e^{\frac{-x}{5}}\Big|_0^4\approx 0,45$$

$$P(180s < T < 7h) = P(3 < T < 7) = \int_3^7 \frac{1}{5} e^{\frac{-x}{5}} dx \approx 0,3$$

Wiadomo, że $P(T < a) = 1 + e^{\frac{-x}{5}}\Big|_0^a = e^{\frac{-a}{5}}$, z drugiej strony prawdopodobieństwo $P(T < a) = 0,7$. Stąd $e^{\frac{-a}{5}} = 0,7$. Logarytmując tę równość stronami otrzymujemy:

$$\ln e^{\frac{-a}{5}} = \ln 0,7 \Rightarrow \frac{-a}{5} = \ln 0,7 \Rightarrow a = -5\ln 0,7$$

Przykład 23

Czas potrzebny na pokonanie specjalnego odcinka toru wodnego jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(40 min; 5 min). Wyznacz: a) prawdopodobieństwo tego, że przeciętny statek pokona ten odcinek w czasie krótszym niż 54 minuty, b) prawdopodobieństwo tego, że przeciętny statek pokona ten odcinek w czasie nie dłuższym niż 48min i nie krótszym niż 30min, c) jaki jest maksymalny czas w którym 90% statków pokonuje ten specjalny odcinek toru wodnego.

Rozwiązanie

Najpierw standaryzujemy zmienną i na końcu odczytujemy wartości z tablic rozkładu normalnego.

$$P(X < 54) = P\left(\frac{X-40}{5} < \frac{54-40}{5}\right) = P(U < 2,8) = \Phi(2,8) = 0,9974$$

$$P(30 < X < 48) = P\left(\frac{30-40}{5} < \frac{X-40}{5} < \frac{48-40}{5}\right) = P(-2 < U < 1,6) = \Phi(1,6) - \Phi(-2) =$$
$$= \Phi(1,6) - (1 - \Phi(2)) = 0,945 - (1 - 0,977) = 0,922$$

$P(X < t) = P\left(\frac{X-40}{5} < \frac{t-40}{5}\right) = P\left(U < \frac{t-40}{5}\right) = \Phi\left(\frac{t-40}{5}\right) = 0,9$ wynika z tego, że $\frac{t-40}{5} = 1,28$, bo wartość funkcji Φ(x) jest równa 0,9 dla x=1,28.

Wtedy t = 46,4 min.

Zadania

71. Zmienna losowa X ma rozkład normalny N(570; 53). Wyznacz prawdopodobieństwo P(X < 505), P(X > 625) oraz P(|X - 629| > 60). Wyznacz liczbę a wiedząc, że $P(X < a) = 0,45$.
72. Zmienna losowa T ma rozkład wykładniczy ze średnią 5,3. Oblicz prawdopodobieństwa $P(X \le 3),\ P(X > 2), P(|X - 3| < 3)$ oraz liczbę a taką, że $P(X < a) = 0,7$
73. Czas oczekiwania na wejście do śluzy jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym. Maksymalny czas oczekiwania wynosi 120 minut, a minimalny 10 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wejście do śluzy trzeba będzie czekać ponad 85 minut? Jakie jest prawdopodobień-

stwo, że na wejście do śluzy trzeba będzie czekać poniżej 1,6 godziny? Dla jakiego czasu t prawdopodobieństwo tego, że czas oczekiwania na wejście do śluzy będzie mniejszy niż t wynosi 0,9?

74. Czas hamowania statku jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Z badań wynika, że średni czas dla prędkości 8w wynosi 24 min, a odchylenie standardowe 5min. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany statek zatrzyma się przed upływem 29 min, a jakie że czas hamowania jest większy niż 35min. Oblicz czas, poniżej którego zatrzyma się 99% statków.
75. Zmienna losowa T ma rozkład wykładniczy ze średnią 3,5h. Jakie jest prawdopodobieństwo, że T jest większe od 100 minut? Z jakim prawdopodobieństwem zmienna T mieści się między 200 minut a 5 godzin?
76. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku od x=1 do x=26. Wyznacz f(x), F(x), EX, P(X>20), P(X< 35), P(-12<X<24).
77. Czas pracy żarówek pochodzących z masowej produkcji w fabryce ABC jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(3500 h; 175 h). Wyznacz: a) prawdopodobieństwo tego, że przeciętna żarówka będzie świecić więcej niż 3125 h, b) prawdopodobieństwo tego, że przeciętna żarówka przestanie świecić przed upływem 3000 h lub po upływie 3880 h, c) po jakim czasie przestanie świecić 55% żarówek.
78. Zmienna losowa *X* ma rozkład normalny N(250; 43). Wyznacz prawdopodobieństwo $P(X < 235)$, $P(X > 245)$ oraz $P(|X - 219| > 60)$. Oblicz c wiedząc, że $P(X < c) = 0.4$
79. Zmienna losowa T ma rozkład wykładniczy ze średnią 3,5h. Jakie jest prawdopodobieństwo, że T jest większe od 100 minut? Z jakim prawdopodobieństwem zmienna T mieści się między 200 minut a 5 godzin?
80. Czas między zgłoszeniami jednostek torowych jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Średni czas oczekiwania na zgłoszenie wynosi 45 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na zgłoszenie jest większe od 70 minut? Z jakim prawdopodobieństwem czas oczekiwania na zgłoszenie mieści się między 20 minut a 1,5 godziny?
81. Klienci podchodzą do okienka pocztowego średnio, co 80 sekund. Czas oczekiwania na kolejnego klienta jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na klienta jest większy od 3 minut? Z jakim prawdopodobieństwem czas oczekiwania mieści się między 20 s a 1,5 minuty?
82. Zmienna losowa T ma rozkład jednostajny na przedziale [2; 6]. Wyznacz funkcję gęstości rozkładu i prawdopodobieństwa: $P(X < 5)$, $P(X < 5)$, $P(X > 3{,}7)$.
83. Zmienna losowa *X* ma rozkład równomierny na przedziale [1; 11] Wyznacz prawdopodobieństwa $P(X < 5)$, $P(X > 7)$ oraz liczbę a taką, że $P(X > a) = 0{,}85$.
84. Czas oczekiwania na wejście do śluzy jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym. Maksymalny czas oczekiwania wynosi 20 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wejście do śluzy trzeba będzie czekać ponad 15 minut?
85. Czas odczytywania całego tekstu automatycznej informacji kolejowej wynosi 6 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dzwoniąc na informację kolejową będziemy czekać na informację o interesującym nas pociągu mniej niż 1 minutę. (Narysuj funkcję gęstości).

Rozdział III. Zmienne losowe dwuwymiarowe

Przykład 24

Dla zmiennej losowej (X,Y), której rozkład prawdopodobieństwa przedstawiono poniżej, sprawdzimy niezależność zmiennych *X* i *Y* oraz wyznaczymy współczynnik korelacji między zmiennymi *X* i *Y.*

X \ Y	-1	0	1	2
2	0,1	0,1	0	0,2
5	0,3	0,2	0,1	0

Najpierw wyznaczamy rozkłady brzegowe, czyli obliczamy sumy prawdopodobieństw: $p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$ i $p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

X \ Y	-1	0	1	2	$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$
2	0,1	0,1	0	0,2	0,4
5	0,3	0,2	0,1	0	0,6
$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$	0,4	0,3	0,1	0,2	1

Rozkładem brzegowym zmiennej *X* jest zbiór {{2; 0,4}, {5; 0,6}}.

Rozkładem brzegowym zmiennej *Y* jest zbiór {{-1; 0,4}, {0; 0,3}, {1; 0,2}, {2, 0,2}}.

Zmienne *X* i *Y* nie są niezależne, gdyż nie zachodzi równość: $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ dla wszystkich i, j. Na przykład p_{11}=0,1 jest różne od iloczynu: $p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$.

$$E(X \cdot Y) = 2 \cdot (-1) \cdot 0,1 + 2 \cdot 0 \cdot 0,1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot (-1) \cdot 0,3 + 5 \cdot 0 \cdot 0,2 + 5 \cdot 1 \cdot 0,1 + 5 \cdot 2 \cdot 0 = -0,4$$

EX = 3,8 i *EY* = 0,1. Stąd kowariancja jest równa:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY = -0,4 - 3,8 \cdot 0,1 = -0,02$$

$$D^2X = E(X^2) - (EX)^2 = 16,6 - (3,8)^2 = 2,16 \qquad D^2Y = E(Y^2) - (EY)^2 = 1,3 - (0,1)^2 = 1,29$$

Współczynnik korelacji obliczamy według wzoru $\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2X} \cdot \sqrt{D^2Y}}$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2X} \cdot \sqrt{D^2Y}} = \frac{-0,02}{\sqrt{2,16} \cdot \sqrt{1,29}} \approx -0,01$$

Zadania

86. Zmienna (X,Y) ma następujący rozkład prawdopodobieństwa

X \ Y	0	2	4
1	0,2	0,12	0,08
10	0,3	0,18	0,12

Sprawdź czy zmienne *X* i *Y* są niezależne.

87. Zmienna (X,Y) ma następujący rozkład prawdopodobieństwa

X \ Y	-3	1
2	0,1	0,5
6	0,3	0,1

Sprawdź czy zmienne *X* i *Y* są niezależne.

88. Na podstawie poniższego rozkładu wyznacz współczynnik korelacji między zmiennymi X i Y.

X \ Y	1	2	4
1	0,1	0,1	0
2	0,1	0,2	0,2
3	0	0,1	0,2

89. Na podstawie poniższego rozkładu wyznacz współczynnik korelacji między zmiennymi X i Y.

x	-2	-1	0	0,5	3
y	0	1	2	5	4

90. Na podstawie poniższego rozkładu wyznacz współczynnik korelacji między zmiennymi X i Y.

x	3	5	10	15
y	1	1	8	6

Rozdział III. Elementy statystyki

Estymacja przedziałowa

Przykład 25

W wyniku pomiaru wytrzymałości 12 lin otrzymano następujące wyniki: 22, 17, 16, 15, 20, 14, 17, 15, 20, 17, 18, 19. Przyjmując, że rozkład wytrzymałości lin jest normalny ze znanym odchyleniem standardowy σ=2, wyznaczymy przedział ufności dla średniej wytrzymałości lin, na poziomie ufności 0.98.

Rozwiązanie

W związku z tym, że parametr σ jest znany stosujemy wzór: $\left(\bar{x}-u\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Wyznaczamy najpierw średnią z próby: $\bar{x}=17{,}5$. Następnie odczytujemy z tablic dystrybuanty $\Phi(x)$ rozkładu $N(0,1)$, liczbę u spełniającą warunek $\Phi(u)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0{,}02}{2}=0{,}99$
u = 2,33, stąd przedział ufności dla wartości średniej wynosi (16,16; 18,84).

Przykład 26

Supermarket chce oszacować tygodniową wartość sprzedaży pewnego produktu. Obserwacja sprzedaży w ciągu 10 losowo wybranych tygodni dała następujące wyniki (w szt.): 125, 110, 95, 120, 87, 89, 100, 105, 98, 125. Wyznacz 90% przedział ufności dla przeciętnej liczby sprzedanych sztuk tego produktu.

Rozwiązanie

W związku z tym, że parametr σ nie jest znany stosujemy wzór: $\left(-t_\alpha\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}+\bar{X},\ t_\alpha\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}+\bar{X}\right)$.
Wyznaczamy najpierw średnią z próby: $\bar{x}=105{,}4$ i odchylenie z próby S = 13,425. Następnie odczytujemy z tablic rozkładu t – Studenta dla 9 stopni swobody i danego poziomu ufności $1-\alpha=0{,}9$ taką liczbę t_α, że $P(|t|>t_\alpha)=0{,}1$. t_α = 1,833, stąd przedział ufności dla przeciętnej liczby sprzedanych sztuk wynosi (97,2; 113,6).

Przykład 27

Przy sprawdzaniu skali magnetometru dokonano 10 niezależnych pomiarów natężenia pola magnetycznego, otrzymując następujące wyniki (w erstedach): 0.008, 0.01, 0.015, 0.012, 0.018, 0.008, 0.01, 0.012, 0.014, 0.012. Zakładając, że rozkład pomiarów jest normalny, na poziomie ufności 0.99 wyznaczymy przedział ufności dla wariancji.

Rozwiązanie

Stosujemy wzór: $\left\langle \frac{n\cdot S^2}{\chi_2^2}, \frac{n\cdot S^2}{\chi_1^2} \right\rangle$

A więc na początku wyznaczamy odchylenie standardowe z próby S = 0,00298, a następnie z tablic rozkładu χ^2 (chi kwadrat) dla 9 stopni swobody i danego poziomu ufności $1-\alpha=0{,}99$, odczytujemy liczby $\chi_1^2,\ \chi_2^2$ spełniające następujące warunki:

$$P\left(\chi^2>\chi_1^2\right)=1-\frac{0{,}01}{2}=0{,}995,\ P\left(\chi^2>\chi_2^2\right)=\frac{0{,}01}{2}=0{,}005$$

$\chi_1^2=1{,}7349,\ \chi_2^2=23{,}589$. Stąd przedział ufności dla wariancji wynosi: (0,0000038, 0,000051).

Pierwiastkując końce tego przedziału otrzymujemy przedział ufności dla odchylenia standardowego, czyli inaczej mówiąc szacujemy dokładność skali magnetometru.

Zadania

91. Producent samochodów chce oszacować przeciętny przebieg (w kilometrach) opony określonego typu przed zupełnym zużyciem. Pobrano próbę, 34 opon i eksploatowano je, aż do całkowitego zużycia, notując liczbę kilometrów przebiegu każdej opony. Otrzymano następujące wyniki (w tys. km): 32, 33, 28, 37, 26, 30, 25, 27, 39, 40. 26,26, 27, 30, 25, 30, 31, 29, 24, 36, 25, 37, 37, 20, 22, 35, 24, 34, 29, 28, 30, 36, 40, 41. Wyznacz 99% przedział ufności dla przeciętnej liczby km, jaką można przejechać na oponach tego typu.
92. Przy sprawdzaniu skali przyrządu pomiarowego wykonano serię 10 pomiarów: 12, 12, 14, 13, 15, 16, 13, 11, 11, 10. Zakładając, że rozkład pomiarów jest normalny oszacuj przedziałowo na poziomie ufności 0,9 odchylenie standardowe wyników pomiarów.
93. Wyniki finansowe w mld USD wszystkich linii lotniczych w ostatnich 7 latach były następujące: 8.2, 8.5, 3.7, -13, -11.3, -6.5, -4.8. Wyznacz przedział ufności dla średniego wyniku (przy założeniu że rozkład wyników finansowych jest normalny).
94. W celu oszacowania odsetka nauczycieli bez pełnych kwalifikacji pedagogicznych w pewnym okręgu szkolnym, wylosowano 10 szkół i okazało się, że na 140 nauczycieli, 29 nie posiada wykształcenia pedagogicznego. Przyjmując współczynnik ufności 1 - α = 0.9, oszacować, procent nauczycieli bez pełnych kwalifikacji pedagogicznych w tym okręgu szkolnym .
95. W pewnym teście psychologicznym otrzymano następujący rozkład wyników liczby zapamiętanych elementów:

Liczba zapamiętanych elementów	5 -15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 -50
Ilość osób	11	25	42	43	23	35

Na poziomie ufności 0,95 wyznaczyć przedział ufności dla średniej liczby zapamiętanych elementów.

96. W pewnym punkcie akwenu dokonano 7 pomiarów głębokości i otrzymano następujące wyniki [m]: 14, 15, 17, 15, 16, 16, 17. Na poziomie ufności $1-\alpha$ wyznaczono przedział ufności dla odchylenia standardowego wyników pomiarów głębokości (przy założeniu, że rozkład pomiarów jest normalny): (0.97, 4.29). Wyznacz α.
97. W pewnym punkcie akwenu dokonano 8 pomiarów deklinacji magnetycznej i otrzymano następujące wyniki: 5.14, 5.21 5.17, 5.18, 5.2, 5.23, 5.19, 5.2. Na poziomie ufności 0.9 wyznacz przedział ufności dla wariancji wyników pomiarów deklinacji magnetycznej. (Przy założeniu, że rozkład pomiarów jest normalny).
98. W celu oszacowania frakcji studentów korzystających z czytelni, wylosowano próbę 154 studentów, z których 56 korzystało z czytelni. Na poziomie ufności 0.9 wyznaczyć przedział ufności dla frakcji studentów korzystających z czytelni .
99. Na podstawie n (n < 30) niezależnych pomiarów przyspieszenia ziemskiego w pewnym punkcie otrzymano: średnią z próby $\overline{x}=9,785$ i odchylenie standardowe S = 0.00146. Jeżeli wiadomo, że rozkład pomiarów jest normalny, to 90% przedział ufności dla przeciętnego przyspieszenia ziemskiego wynosi: (9.7843, 9.7856). Wyznacz n.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Przykład 28

Na podstawie próby: 32, 34, 34, 36, 38, 36, 34, 33, 32, 32, 34 zweryfikować na poziomie istotności 0.1 hipotezę, że średnia jest równa 36, przy założeniu, że rozkład w populacji jest normalny, ze znanym odchyleniem standardowy σ = 1,5. Hipotezą alternatywną jest $H_A: m \neq m_0$

Rozwiązanie

W związku z tym, że parametr σ jest znany stosujemy statystykę: $\dfrac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n}$

Średnia z próby jest następująca $\overline{x}=34,1$ stąd statystyka testowa ma wartość (−9,45), gdyż:

$$\frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n}=\frac{34,1-36}{1,5}\cdot\sqrt{11}\approx -9,45$$

Z tablicy dystrybuanty $\Phi(x)$ rozkładu $N(0,1)$, odczytujemy liczbę u spełniającą warunek

$\Phi(u)=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-\dfrac{0,1}{2}=0,95$ .u = 1,64. Obszarem krytycznym jest więc suma przedziałów: $(-\infty;-1,64)\cup(1,64;+\infty)$. Wartość statystyki testowej leży zdecydowanie w obszarze krytycznym, dlatego odrzucamy hipotezę zerową orzekającą, że średnia ma wartość 36.

Przykład 29

Dwóch oszczepników osiągnęło w ostatnim roku następujące wyniki (w metrach). Zawodnik A: 78, 68, 77, 69, 82, 68, 79, 80, 81. Zawodnik B: 72, 77, 86, 70, 64, 84, 67, 85. Aby porównać regularność ich wyników, należy zweryfikować hipotezę o równości wariancji : $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ na poziomie istotności α = 0,05, wobec hipotezy alternatywnej: $H_A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Dla zawodnika A odchylenie standardowe nieobciążone wynosi $\widehat{S}_A = 5,783$, a dla zawodnika B odchylenie standardowe nieobciążone wynosi $\widehat{S}_B = 8,634$, W związku z tym, że odchylenie standardowe zawodnika B jest większe niż zawodnika A, jako próbę nr 1 bierzemy rezultaty zawodnika B. Więc $\widehat{S}_1 = 8,634$ i $\widehat{S}_2 = 5,783$, stąd wartość statystyki testowej wynosi $\frac{\widehat{S}_1^2}{\widehat{S}_2^2} = \frac{74,55}{33,44} \approx 2,23$

Wartością F_α odczytaną z tablic rozkładu *F* Snedecora dla poziomu istotności α = 0,05 oraz dla 7 i 8 stopni swobody jest liczba F_α = 3,5. Stąd obszarem krytycznym jest przedział (3,5; ∞). Statystyka testowa nie należy do tego przedziału więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednakowej regularności rzutów obu oszczepników.

Zadania

100. Liczba hoteli w wylosowanych województwach w 1997 roku kształtowała się następująco: 33, 28, 22, 53, 69, 70. Na poziomie istotności 0.9 sprawdzić hipotezę, że odchylenie standardowe liczby hoteli w województwach jest większe od 12, przy założeniu że rozkład liczby hoteli jest normalny.
101. Na podstawie próby, której wyniki przedstawia tabela:

x_i	23	24	26	27	32
liczność	11	13	13	15	10

102. Zweryfikować hipotezę H_0: m = 26.5, przeciw hipotezie H_A: m > 26.5, na poziomie ufności 0.9.
103. W pewnym punkcie akwenu dokonano 8 pomiarów deklinacji magnetycznej i otrzymano następujące wyniki: 5.28, 5.19, 5.17, 5.18, 5.2, 5.22, 5.15, 5.1. Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę H_0: σ^2 = 0.006, przeciw hipotezie H_A: σ^2 > 0.006.
104. Automat ma produkować blaszki o nominalnej grubości 0.6 mm. Wylosowana próba 25 blaszek dała średnią 0.59 mm oraz wariancję z próby 0.05 mm^2. Przy jakim maksymalnym poziomie istotności można odrzucić hipotezę, że automat działa prawidłowo?
105. Na podstawie próby: 32, 34, 35, 34, 36, 35, 36, 34, 33, 32, 32, 34 zweryfikować na poziomie istotności 0.99 hipotezę, że średnia jest 34, przy założeniu, że rozkład w populacji jest normalny ze znanym σ=2,4.
106. Badano głębokość pewnego akwenu i otrzymano następujące wyniki [m]: 134, 135, 127, 135, 136, 136, 137. Jaki jest maksymalny poziom ufności, przy którym można odrzucić hipotezę, że średnia głębokość jest większa od 135 m?

107. Badano głębokość pewnego akwenu i otrzymano następujące wyniki [m]: 14, 15, 17, 15, 16, 16, 17. Jaki jest maksymalny poziom ufności, przy którym można odrzucić hipotezę, że odchylenie standardowe pomiarów jest mniejsze od 0.5 m?
108. Na podstawie próby: 132, 134, 134, 136, 138, 136, 134, 133, 132 zweryfikować na poziomie istotności 0.95 hipotezę, że średnia jest niewiększa od 135, przy założeniu, że rozkład w populacji jest normalny.
109. Zweryfikować na poziomie istotności 0.9 hipotezę, że średnia jest równa 135 jeżeli dysponujemy następującymi wynikami:

wartość	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 –60
liczność	21	38	54	33

110. Jaki jest maksymalny poziom ufności, przy którym można odrzucić hipotezę, że średnia w populacji jest większa od 36, jeżeli dysponujemy następującymi wynikami:

wartość	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 –10
liczność	42	28	34	23

111. Liczba miejsc w wylosowanych hotelach kształtowała się następująco: 133, 228, 218, 183, 169, 170. Na poziomie istotności 0.98 sprawdzić hipotezę, że odchylenie standardowe liczby miejsc w hotelach jest większe od 80, przy założeniu że rozkład liczby miejsc jest normalny.
112. W losowo wybranej próbie 200 studentów, 46 ma swój samochód. Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę orzekającą, że 25% studentów posiada własny samochód.

Test zgodności chi kwadrat (Pearsona)

Przykład 30

W pewnym porcie zaobserwowano następujące liczby zgłoszeń statków w ciągu doby:

Liczba zgłoszeń	0	1	2	3	4	Ponad 4
liczność	22	58	65	35	10	10

Na poziomie istotności 0,1 zweryfikujemy hipotezę o tym, że rozkład dziennej liczby zgłoszeń w tym porcie jest rozkładem Poissona.

W celu wyznaczenia statystyki testowej $\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k\right)^2}{np_k}$ tworzymy tabelę, w której zapisujemy liczebności zaobserwowane i teoretyczne. Liczności teoretyczne obliczamy mnożąc prawdopodobieństwo ze wzoru Poissona $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ przez liczbę obserwacji, czyli w tym wypadku 200. Za parametr λ bierzemy średnią z próby, która wynosi 1,9. Ostatnie prawdopodobieństwo w trzeciej kolumnie jest dopełnieniem powyższych prawdopodobieństw do 1.

x_i	n_k	p_k	np_k	$n_k - np_k$	$(n_k - np_k)^2 : np_k$
0	22	0,15	30	-8	2,13
1	58	0,284	56,8	1,2	0,03
2	65	0,27	54	11	2,24
3	34	0,171	34,2	-0,2	0,001
4	11	0,801	16,2	-5,2	1,67
ponad 4	10	0,044	8.8	1,2	0,16

Wartość statystyki testowej χ^2_z jest równa sumie liczb z ostatniej kolumny i wynosi 6,231. Jako, że liczba podzbiorów, na jakie podzieliliśmy dane z próby wynosi r=6, stąd wartość krytyczną χ^2_α odczytujemy z tablic rozkładu χ^2 dla 4 stopni swobody (od r odejmujemy jak zawsze przy tym rozkładzie 1 i jeszcze odejmujemy liczbę szacowanych parametrów weryfikowanego rozkładu, czyli w tym wypadku 1, bo szacowaliśmy tylko λ). $\chi^2_\alpha = 9{,}488$ czyli obszarem krytycznym jest przedział (9,488; ∞), do którego wartość statystyki testowej nie należy. Nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy o tym, że rozkład dziennej liczby zgłoszeń w tym porcie jest rozkładem Poissona.

Zadania

113. W pewnym urzędzie pocztowym zaobserwowano następującą liczbę petentów zgłaszających się w ciągu godziny do okienka pocztowego:

Liczba zgłoszeń	2	3	4	5	Ponad 5
liczność	28	45	65	30	15

Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę o tym, że rozkład liczbę petentów jest rozkładem Poissona.

114. Zweryfikować na poziomie istotności 0.01 hipotezę, że rozkład wartości przedstawionych poniżej jest normalny:

wartość	1 – 20	20 – 30	30 – 50	50 –80
liczność	21	38	54	13

115. Rejestrowano czas pomiędzy zgłoszeniami kolejnych jednostek przepływających pod mostem. Wyniki przedstawia poniższa tabela

Czas [h]	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	Ponad 8
Liczba obserwacji	42	28	10	12	5

Zweryfikować na poziomie istotności 0.1 hipotezę, że rozkład czasu pomiędzy zgłoszeniami kolejnych jednostek przepływających pod mostem jest wykładniczy.

Test niezależności chi kwadrat

Przykład 31

Przy nowym podziale studentów na grupy, postanowiono zbadać zależność między oceną semestralną z języka angielskiego, a oceną semestralną z matematyki. Poniższa tablica zawiera liczebności studentów, którzy uzyskali dane oceny z angielskiego i z matematyki.

Mat / *J. Ang*	2	3	4	5	$\sum_{j=1}^{r} n_{kj}$
2	8	5	0	0	13
3	7	57	34	3	101
4	1	17	27	4	47
5	0	20	12	3	39
$\sum_{i=1}^{k} n_{i2}$	16	99	71	14	**200**

Zweryfikujemy hipotezę o niezależności ocen z języka angielskiego i z matematyki, na poziomie istotności 0,1.

Testem jest w tym wypadku statystyka: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{n_{ij}^2}{\widehat{n}_{ij}}\right) - n$, gdzie n = 200, a n_{ij} to zaobserwowane liczności z tabeli niezależności .

Teoretyczne liczności obliczamy według wzoru: $\widehat{n}_{ij} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\cdot\sum_{j=1}^{r} n_{ij}$

$$\widehat{n}_{11} = \frac{1}{200}\cdot 13\cdot 16 = 1,04$$

$$\widehat{n}_{12} = \frac{1}{200}\cdot 13\cdot 99 = 6,44$$

Obliczamy tak wszystkie liczebności teoretyczne i obliczamy statystykę testową. Dla ułatwienia dalszych obliczeń, liczebności teoretyczne można również umieścić w tabeli:

J. Ang \ *Mat*	2	3	4	5	$\sum_{j=1}^{r} n_{kj}$
2	1,04	6,44	4,62	0,91	13
3	8,08	50	35,86	7,07	101
4	3,76	23,27	16,69	3,29	47
5	3,12	19,31	13,85	2,73	39
$\sum_{i=1}^{k} n_{i2}$	16	99	71	14	**200**

Wartość statystyki testowej wynosi $\chi_z^2 = 274{,}03$ Jako, że liczba wariantów cechy X (J. Ang.) jest równa k=4 i że liczba wariantów cechy Y (Mat) jest równa r=4, stąd wartość krytyczną χ_α^2 odczytujemy z tablic rozkładu χ^2 dla 9 stopni swobody ($(r-1)(k-1)$) i α=0,1. $\chi_\alpha^2 = 14{,}684$ czyli obszarem krytycznym jest przedział (14,684; ∞). Wartość statystyki testowej należy do tego przedziału, należy więc zdecydowanie odrzucić hipotezę o niezależności ocen z języka angielskiego i z matematyki.

Zadania

116. Badano zależność pomiędzy liczbą studentów w pokoju w akademiku, a częstością korzystania z czytelni. Niech X oznacza liczbę studentów w pokoju w akademiku, a Y sumaryczny, tygodniowy czas przebywania w czytelni. Na podstawie poniższej tabeli, zweryfikować na poziomie istotności 0.1 hipotezę o niezależności cech *X* i *Y*.

X \ *Y*	0 - 2	2 -4	4 - 6	6 - 8
2	1	3	0	0
3	2	15	34	3
4	2	7	27	4

117. Badano zależność pomiędzy rodzajem stosowanego paliwa, a wiekiem kierowców. Niech X oznacza rodzaj stosowanego paliwa, a Y wiek kierowców. Na podstawie poniższej tabeli, zweryfikować na poziomie istotności 0.01 hipotezę o niezależności cech *X* i *Y*.

X \ Y	20 - 25	2 5- 35	35 - 50	Ponad 50
Pb95	10	3	22	10
Pb98	12	15	24	3
ON	20	7	27	14
LPG	12	14	2	11

Regresja liniowa

Przykład 32

Mierzono współzależność między ciśnieniem, a temperaturą dla 10 elementowej próby losowej urządzeń pewnego typu. Wyniki pomiarów przedstawiono w poniższej tabeli

Ciśnienie [hPa]	17	19	20	21	22	24	26	27	27	30
Temperatura [° C]	19	20	23	21	23	23	26	25	26	34

Wyznaczymy najpierw współczynnik korelacji między ciśnieniem, a temperaturą, a następnie równanie regresji liniowej dla tych dwóch zmiennych. Jako zmienną X wzięto ciśnienie, a temperatura to zmienna Y. Stąd parametry poszczególnych zmiennych wynoszą:

$\overline{X} = 23{,}3$, $\overline{Y} = 24$, $S_X = 3{,}95$, $S_Y = 4{,}02$, a suma $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ wynosi 5735. Wstawiając te wartości do wzoru na empiryczny współczynnik korelacji $r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y}}{n \cdot S_X \cdot S_Y}$ otrzymujemy *r* = 0,899.

Współczynnik *a* w równaniu regresji liniowej *y* = *a* ·*x* + *b* wynosi: $a = r \cdot \frac{S_Y}{S_X} = 0{,}899 \cdot \frac{4{,}02}{3{,}95} \approx 0{,}915$.

Natomiast współczynnik *b* jest równy 2,655. Stąd równanie regresji ma postać: *y* = 0,915 ·*x* + 2,655. Tego typu równania można wykorzystywać do wyznaczania wartości zmiennej Y czyli temperatury. Na przykład dla ciśnienia równego 25 hPa, obliczona wartość temperatury wynosi 25,53.

Zadania

118. Wyznacz równanie regresji liniowej na podstawie próby:

x_i	23	24	26	27	29	32
y_i	101	123	103	105	108	110

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0, 1)

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,1	0,999032	0,999065	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289
3,2	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499
3,3	0,999517	0,999534	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999651
3,4	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758
3,5	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999822	0,999828	0,999835
3,6	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888
3,7	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925
3,8	0,999928	0,999931	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950
3,9	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967
4	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978
4,1	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986

Krytyczne wartości dla rozkładu *t* - *Studenta*

	poziom istotności - α								
Stopnie swobody	**0,2**	**0,15**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	3,0776835	4,1652998	6,3137515	12,706205	31,820516	63,656741	127,32134	318,30884	636,61925
2	1,8856181	2,2819306	2,9199856	4,3026527	6,9645567	9,9248432	14,089047	22,327125	31,599055
3	1,6377444	1,9243197	2,3533634	3,1824463	4,5407029	5,8409093	7,4533185	10,214532	12,923979
4	1,5332063	1,7781922	2,1318468	2,7764451	3,7469474	4,6040949	5,5975684	7,1731822	8,6103016
5	1,475884	1,6993626	2,0150484	2,5705818	3,36493	4,032143	4,7733406	5,8934295	6,8688266
6	1,4397557	1,6501731	1,9431803	2,4469118	3,1426684	3,707428	4,3168271	5,2076262	5,9588162
7	1,4149239	1,6165917	1,8945786	2,3646243	2,9979516	3,4994833	4,0293372	4,7852896	5,4078825
8	1,3968153	1,5922214	1,859548	2,3060041	2,8964594	3,3553873	3,8325187	4,5007909	5,0413054
9	1,3830287	1,5737358	1,8331129	2,2621572	2,8214379	3,2498355	3,6896624	4,2968057	4,7809126
10	1,3721836	1,5592359	1,8124611	2,2281388	2,7637695	3,1692727	3,5814062	4,1437005	4,5868939
11	1,3634303	1,5475598	1,7958848	2,2009852	2,7180792	3,1058065	3,4966142	4,024701	4,4369793
12	1,3562173	1,5379565	1,7822875	2,1788128	2,680998	3,0545396	3,4284442	3,9296333	4,3177913
13	1,3501713	1,5299196	1,7709334	2,1603687	2,6503088	3,0122758	3,3724679	3,8519824	4,2208317
14	1,3450304	1,5230951	1,7613101	2,1447867	2,6244941	2,9768427	3,3256958	3,7873902	4,1404541
15	1,3406056	1,517228	1,7530503	2,1314495	2,6024803	2,9467129	3,2860386	3,7328344	4,0727652
16	1,3367572	1,5121302	1,7458837	2,1199053	2,5834872	2,9207816	3,2519929	3,6861548	4,0149963
17	1,3333794	1,5076598	1,7396067	2,1098156	2,566934	2,8982305	3,2224499	3,6457674	3,9651263
18	1,3303909	1,5037077	1,7340636	2,100922	2,5523796	2,8784405	3,1965742	3,6104849	3,9216458
19	1,3277282	1,5001888	1,7291328	2,093024	2,5394832	2,8609346	3,1737245	3,5794001	3,8834059
20	1,3253407	1,4970355	1,7247182	2,0859634	2,527977	2,8453397	3,1534005	3,5518083	3,8495163
21	1,3231879	1,4941938	1,7207429	2,0796138	2,517648	2,8313596	3,1352062	3,5271537	3,8192772
22	1,3212367	1,4916196	1,7171443	2,0738731	2,5083245	2,8187561	3,1188242	3,504992	3,7921307
23	1,3194602	1,4892769	1,7138715	2,0686576	2,4998667	2,8073357	3,103997	3,4849644	3,7676268
24	1,3178359	1,4871358	1,7108821	2,0638985	2,4921595	2,7969395	3,0905135	3,4667773	3,7453986
25	1,3163451	1,4851713	1,7081407	2,0595385	2,4851072	2,7874358	3,0781995	3,4501887	3,7251439
26	1,3149719	1,4833625	1,7056179	2,0555294	2,4786298	2,7787145	3,0669091	3,4349972	3,7066117
27	1,3137029	1,4816916	1,7032884	2,0518305	2,4726599	2,7706829	3,0565201	3,4210336	3,6895917
28	1,3125268	1,4801434	1,7011309	2,0484071	2,4671401	2,7632624	3,0469288	3,4081552	3,6739064
29	1,3114336	1,4787048	1,699127	2,0452296	2,4620214	2,7563859	3,0380467	3,3962403	3,659405
30	1,310415	1,4773647	1,6972609	2,0422724	2,4572615	2,7499957	3,0297982	3,3851849	3,6459586
40	1,3030771	1,4677204	1,683851	2,0210754	2,4232568	2,7044593	2,9711713	3,3068777	3,5509658
50	1,2987137	1,461994	1,675905	2,0085591	2,4032719	2,6777933	2,9369641	3,2614091	3,4960129
60	1,2958211	1,4582013	1,6706489	2,0002978	2,3901195	2,660283	2,9145526	3,2317091	3,4602005
70	1,2937629	1,4555042	1,6669145	1,9944371	2,3808075	2,6479046	2,8987338	3,2107891	3,4350145
80	1,2922236	1,4534881	1,6641246	1,9900634	2,3738682	2,6386906	2,886972	3,1952577	3,4163375
90	1,2910289	1,4519238	1,6619611	1,9866745	2,3684974	2,6315652	2,8778842	3,1832708	3,4019353
100	1,2900748	1,4506749	1,6602343	1,9839715	2,3642174	2,6258905	2,8706515	3,1737395	3,3904913
110	1,2892952	1,4496546	1,6588242	1,9817652	2,3607263	2,6212645	2,8647586	3,1659794	3,3811791
120	1,2886462	1,4488055	1,6576509	1,9799304	2,3578246	2,6174211	2,8598648	3,1595387	3,3734538

Krytyczne wartości dla rozkładu $\chi 2$ *(chi kwadrat)*

		poziom istotności - α						
		0,999	**0,998**	**0,995**	**0,99**	**0,98**	**0,95**	**0,9**
stopnie swobody	**1**	0,000001	0,000006	0,000039	0,0001571	0,0006285	0,0039321	0,0157908
	2	0,002001	0,004004	0,0100251	0,0201007	0,0404054	0,1025866	0,210721
	3	0,0242976	0,0386809	0,0717218	0,1148318	0,1848318	0,3518463	0,5843744
	4	0,090804	0,1292377	0,2069891	0,2971095	0,4293982	0,710723	1,0636232
	5	0,2102126	0,28014	0,4117419	0,5542981	0,7518889	1,1454762	1,610308
	6	0,3810668	0,486407	0,6757268	0,8720903	1,1344192	1,6353829	2,2041307
	7	0,5984938	0,7410573	0,9892557	1,2390423	1,564293	2,1673499	2,8331069
	8	0,8571048	1,0375239	1,3444131	1,6464974	2,0324769	2,7326368	3,4895391
	9	1,1519495	1,3702055	1,7349329	2,0879007	2,5323787	3,3251129	4,168159
	10	1,4787435	1,7344596	2,1558565	2,5582122	3,0590514	3,9402991	4,8651821
	11	1,8338527	2,1264588	2,6032219	3,0534841	3,6086869	4,5748131	5,5777848
	12	2,2142093	2,5430358	3,0738237	3,570569	4,1782871	5,2260295	6,3037961
	13	2,6172181	2,9815505	3,5650346	4,1069155	4,7654454	5,8918644	7,0415046
	14	3,0406725	3,4397832	4,074675	4,6604251	5,3681975	6,5706315	7,7895337
	15	3,4826845	3,915852	4,6009156	5,2293489	5,9849163	7,260944	8,5467563
	16	3,9416278	4,4081474	5,1422055	5,8122125	6,6142374	7,9616456	9,3122365
	17	4,4160927	4,9152823	5,6972171	6,4077598	7,255003	8,6717603	10,085186
	18	4,9048488	5,4360521	6,2648047	7,0149109	7,9062214	9,3904551	10,864936
	19	5,406816	5,9694039	6,8439715	7,6327297	8,5670355	10,117013	11,65091
	20	5,9210408	6,5144114	7,4338443	8,2603984	9,2366986	10,850812	12,442609
	21	6,4466766	7,0702549	8,0336535	8,897198	9,9145559	11,591305	13,239598
	22	6,9829685	7,636205	8,6427165	9,5424924	10,600029	12,338015	14,041493
	23	7,5292398	8,21161	9,2604248	10,195716	11,292604	13,090514	14,847956
	24	8,0848816	8,7958844	9,8862335	10,856362	11,991822	13,848425	15,658684
	25	8,6493436	9,3885002	10,519652	11,523975	12,697273	14,611408	16,473408
	26	9,2221269	9,988979	11,160237	12,198147	13,408585	15,379157	17,291885
	27	9,802777	10,596886	11,807587	12,878504	14,125422	16,151396	18,113896
	28	10,390879	11,211826	12,461336	13,56471	14,847481	16,927875	18,939243
	29	10,986054	11,833436	13,121149	14,256455	15,574483	17,708366	19,767744
	30	11,587951	12,461383	13,78672	14,953457	16,306175	18,492661	20,599235
	40	17,916427	19,032116	20,706535	22,164261	23,837574	26,509304	29,050523
	50	24,673905	26,005747	27,990749	29,706683	31,663863	34,764252	37,688649
	60	31,738342	33,267067	35,534492	37,484852	39,699424	43,187959	46,458889
	70	39,036378	40,747049	43,27518	45,441718	47,893445	51,739279	55,32894
	80	46,519876	48,400487	51,171932	53,540078	56,212845	60,39148	64,277846
	90	54,155244	56,195877	59,196305	61,754079	64,63466	69,126031	73,291092
	100	61,91794	64,110225	67,327564	70,064896	73,142184	77,929467	82,358138
	110	69,789391	72,126145	75,550045	78,458311	81,722808	86,791629	91,471038
	120	77,755141	80,230109	83,851573	86,923281	90,366743	95,704638	100,62363

Krytyczne wartości dla rozkładu $\chi 2$ *(chi kwadrat)*

stopnie swobody	poziom istotności - α						
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	2,7055	3,8415	5,4119	6,6349	7,8794	9,5495	10,828
2	4,6052	5,9915	7,824	9,2103	10,597	12,429	13,816
3	6,2514	7,8147	9,8374	11,345	12,838	14,796	16,266
4	7,7794	9,4877	11,668	13,277	14,86	16,924	18,467
5	9,2364	11,07	13,388	15,086	16,75	18,907	20,515
6	10,645	12,592	15,033	16,812	18,548	20,791	22,458
7	12,017	14,067	16,622	18,475	20,278	22,601	24,322
8	13,362	15,507	18,168	20,09	21,955	24,352	26,124
9	14,684	16,919	19,679	21,666	23,589	26,056	27,877
10	15,987	18,307	21,161	23,209	25,188	27,722	29,588
11	17,275	19,675	22,618	24,725	26,757	29,354	31,264
12	18,549	21,026	24,054	26,217	28,3	30,957	32,909
13	19,812	22,362	25,472	27,688	29,819	32,535	34,528
14	21,064	23,685	26,873	29,141	31,319	34,091	36,123
15	22,307	24,996	28,259	30,578	32,801	35,628	37,697
16	23,542	26,296	29,633	32	34,267	37,146	39,252
17	24,769	27,587	30,995	33,409	35,718	38,648	40,79
18	25,989	28,869	32,346	34,805	37,156	40,136	42,312
19	27,204	30,144	33,687	36,191	38,582	41,61	43,82
20	28,412	31,41	35,02	37,566	39,997	43,072	45,315
21	29,615	32,671	36,343	38,932	41,401	44,522	46,797
22	30,813	33,924	37,659	40,289	42,796	45,962	48,268
23	32,007	35,172	38,968	41,638	44,181	47,391	49,728
24	33,196	36,415	40,27	42,98	45,559	48,812	51,179
25	34,382	37,652	41,566	44,314	46,928	50,223	52,62
26	35,563	38,885	42,856	45,642	48,29	51,627	54,052
27	36,741	40,113	44,14	46,963	49,645	53,023	55,476
28	37,916	41,337	45,419	48,278	50,993	54,411	56,892
29	39,087	42,557	46,693	49,588	52,336	55,792	58,301
30	40,256	43,773	47,962	50,892	53,672	57,167	59,703
40	51,805	55,758	60,436	63,691	66,766	70,618	73,402
50	63,167	67,505	72,613	76,154	79,49	83,657	86,661
60	74,397	79,082	84,58	88,379	91,952	96,404	99,607
70	85,527	90,531	96,388	100,43	104,21	108,93	112,32
80	96,578	101,88	108,07	112,33	116,32	121,28	124,84
90	107,57	113,15	119,65	124,12	128,3	133,49	137,21
100	118,5	124,34	131,14	135,81	140,17	145,58	149,45
110	129,39	135,48	142,56	147,41	151,95	157,56	161,58
120	140,23	146,57	153,92	158,95	163,65	169,46	173,62

Krytyczne wartości dla rozkładu *F Snedecora* dla α = 0,05

stopnie swobody mianownika	stopnie swobody licznika: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,448	199,500	215,707	224,583	230,162	233,986	236,768	238,883	240,543
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211