1. Powierzchnie w R3

Jeżeli X jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^2$ liczb rzeczywistych oraz $\mathbb{R}^3_*$ oznacza zbiór wszystkich wektorów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, to ***funkcją wektorową dwóch zmiennych*** rzeczywistych nazywamy odwzorowanie

$$\mathbf{r}: X \to \mathbb{R}^3_*$$

Funkcję **r** można przedstawić w postaci

$$\mathbf{r}(u,v) = \left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]$$

Jeżeli hodografem funkcji **r**(*u,v*) jest powierzchnia S, to funkcję **r**(*u,v*) nazywamy przedstawieniem parametrycznym powierzchni S, a parametry *u* i *v* noszą nazwę ***współrzędnych krzywoliniowych*** lub współrzędnych Gaussa.

Krzywe na powierzchni S, utworzone dla stałych wartości parametru *u* lub *v* (*u = const. , v = const.*) nazywamy ***liniami parametrycznymi*** na powierzchni.

Linie parametryczne *u = const. , v = const.* tworzą na powierzchni tzw. ***siatkę krzywoliniową*** współrzędnych.

Przykład:

Powierzchnia o równaniu $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, v]$ jest nazywana helikoidą (zwykłą powierzchnią śrubową).

Punktem regularnym powierzchni S o równaniu **r**(*u,v*) nazywamy taki punkt odpowiadający parametrom u_0 , v_0, że zachodzi

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0$$

gdzie $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ oznaczają pochodne cząstkowe funkcji $\mathbf{r}(u,v)$ względem zmiennych *u* i *v*.

Jeżeli w punkcie P$\in$S zachodzi $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 0$ lub iloczyn $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nie jest określony w tym punkcie, to mówimy, że punkt P jest punktem osobliwym danego przedstawienia parametrycznego. Natomiast, jeżeli punkt P jest punktem osobliwym każdego przedstawienia parametrycznego powierzchni S, nazywamy go ***punktem osobliwym*** tej powierzchni.

Przykład

Sprawdzić, czy punkt P(0, 0, 0) jest punktem osobliwym powierzchni stożkowej o równaniu $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$

Płaszczyzną styczną do powierzchni S w punkcie regularnym P nazywamy płaszczyznę wyznaczoną przez styczne do linii parametrycznych *u = const.* i *v = const.* W punkcie P.

Wektorem normalnym powierzchni S w punkcie regularnym P nazywany wektor jednostkowy

$$\overrightarrow{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

Wektor **m** i każdy równoległy do niego jest wektorem normalnym płaszczyzny stycznej do powierzchni S.

Przykład

Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu $\mathbf{r}(u,v) = [2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3]$ w punkcie P o współrzędnych krzywoliniowych u=2 i v = 1.

Odp. 18x+3y-4z-41=0

1.1. Powierzchnie obrotowe

Niech L oznacza krzywą płaską położoną w płaszczyźnie Oxz i określoną równaniem $\mathbf{r}(u) = [\varphi(u), 0, \psi(u)]$, gdzie $u \in \langle a, b \rangle$, przy czym zakładamy, że krzywa ta ma co najwyżej dwa punkty wspólne z osią Oz i odpowiadają one parametrom $u = a$ lub $u = b$. Powierzchnię powstałą z obrotu krzywej L wokół osi Oz nazywamy ***powierzchnią obrotową***. Jej przedstawieniem parametrycznym jest funkcja

$$\mathbf{r}(u,v) = [\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u)]$$

gdzie $u \in \langle a, b \rangle$ i $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Południkami tej powierzchni nazywamy linie parametryczne *v = const.*, zaś ***równoleżnikami*** – linie parametryczne *u = const.*

Przykłady

1. Jeżeli obracaną krzywą jest parabola o równaniu z=x^2, to jej parametryczne przedstawienie jest następujące $\mathbf{r}(u) = [u, 0, u^2]$, a równanie powierzchni obrotowej, czyli w tym przypadku paraboloidy obrotowej ma postać: $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u^2]$
2. Jeżeli obracaną krzywą jest prosta o równaniu z=x, to jej parametryczne przedstawienie jest następujące $\mathbf{r}(u) = [u, 0, u]$, a równanie powierzchni obrotowej, czyli w tym przypadku powierzchni stożkowej ma postać: $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$
3. Jeżeli obracaną krzywą jest półokrąg o równaniu $\mathbf{r}(u) = [R\cos u, 0, R\sin u]$, to równanie powierzchni obrotowej, czyli w tym przypadku sfery ma postać: $\mathbf{r}(u,v) = [R\cos u \, \cos v, R\cos u \, \sin v, R\sin u]$

1.2. Pierwsza forma kwadratowa powierzchni

Niech $\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(u,v\right)$ będzie równaniem powierzchni regularnej S klasy C^1 i niech L będzie krzywą regularną klasy C^1 położoną na tej powierzchni określoną równaniem $\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(u(t),v(t)\right)$

Długość łuku krzywej L dla parametrycznego przedstawienia $\mathbf{r}(t)$ w przedziale $t\in\langle a,b\rangle$ określa wzór

$$s=\int_a^b\left|\mathbf{r}'(t)\right|dt$$

Natomiast dla przedstawienia $\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(u(t),v(t)\right)$, które jest funkcją wektorową złożoną, należy wykorzystać wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}_u\cdot\frac{du}{dt}+\mathbf{r}_v\cdot\frac{dv}{dt}$$

Otrzymujemy wtedy $\left|\mathbf{r}'(t)\right|=\sqrt{\mathbf{r}'(t)\circ\mathbf{r}'(t)}=\sqrt{\left(\mathbf{r}_u\cdot\frac{du}{dt}+\mathbf{r}_v\cdot\frac{dv}{dt}\right)\circ\left(\mathbf{r}_u\cdot\frac{du}{dt}+\mathbf{r}_v\cdot\frac{dv}{dt}\right)}$

Wykorzystując własności iloczynu skalarnego oraz wprowadzając zapis *u'* za *du*/*dt* oraz *v'* za *dv*/*dt* długość łuku krzywej L wyraża się wzorem

$$s=\int_a^b\sqrt{\mathbf{r}_u^2u'^2+2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_vu'v'+\mathbf{r}_v^2v'^2}\,dt$$

Wynika z tego, że różniczka długości łuku krzywej L wyraża się wzorem:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\mathbf{r}_u^2u'^2+2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_vu'v'+\mathbf{r}_v^2v'^2}$$

Oznaczając $\mathbf{r}_u^2=E,\ \ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v=F,\ \ \mathbf{r}_v^2=G$ otrzymujemy wzór na kwadrat różniczki długości łuku krzywej L:

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

Prawa strona tego równania nosi nazwę ***pierwszej formy kwadratowej*** powierzchni S.

Współczynniki pierwszej formy kwadratowej wykorzystywane są w różnych zagadnieniach dotyczących krzywych lub obszarów położonych na powierzchni S.

Dla dwóch krzywych L_1 i L_2 zawartych w powierzchni S, przechodzących przez punkt $P\in S$, wektory kierunkowe stycznych do tych krzywych w punkcie P mają postać: $d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv$ i $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_u\delta u+\mathbf{r}_v\delta v$.

Kąt θ między krzywymi L_1 i L_2 jest równy kątowi między ich wektorami stycznymi $d\mathbf{r}$ i $\delta\mathbf{r}$. Czyli kosinus tego kąta można wyznaczyć ze wzoru

$$\cos\theta = \frac{d\mathbf{r}\circ\delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|}$$

Wykorzystując współczynniki pierwszej formy kwadratowej można kąt θ obliczyć ze wzoru

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

Przykład

Na helikoidzie położone są dwie krzywe: L_1 o równaniu $u = 2v^2$ i L_2 o równaniu $v=1$. Wyznaczyć kąt między tymi krzywymi.

Równanie parametryczne helikoidy: $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 4v]$

θ = arccos(2/3)

1.3. Druga forma kwadratowa powierzchni

Trzy wektory Freneta określone dla dowolnej krzywej w $\mathbb{R}^3$, w przypadku krzywej położonej na powierzchni S są niewystarczające do opisu własności powierzchni S. Stąd wygodne jest wprowadzenie trójki innych wektorów jednostkowych ortogonalnych względem siebie. Dla wektora stycznego **t** i wektora normalnego do powierzchni **m** definiuje się trzeci wektor $\mathbf{l} = \mathbf{m}\times\mathbf{t}$. I te trzy wektory są podstawą różnych wielkości odnoszących się do powierzchni S.

Drugą formą kwadratową powierzchni S nazywamy wyrażenie:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

gdzie

$$L = \mathbf{r}_{uu}\circ\mathbf{m},\ M = \mathbf{r}_{uv}\circ\mathbf{m} \text{ i } N = \mathbf{r}_{vv}\circ\mathbf{m}$$

Uwzględniając wzór na wektor normalny **m** powierzchni S otrzymujemy wzory

$$L = \frac{1}{W}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\circ\mathbf{r}_{uu},\ M = \frac{1}{W}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\circ\mathbf{r}_{uv} \text{ i } N = \frac{1}{W}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\circ\mathbf{r}_{vv}$$

gdzie $LW = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v| = \sqrt{EG-F^2}$

Krzywizną normalną krzywej L zawartej w powierzchni S nazywamy krzywiznę odnoszącą się do wektora normalnego **m** powierzchni S i wyrażamy wzorem

$$\kappa_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Krzywizną Gaussa powierzchni S w danym punkcie P$\in$S nazywamy współczynnik

$$K = \frac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2}$$