I. MACIERZE I WYZNACZNIKI

Macierzą o wymiarach $w \times k$ nazywamy skończony ciąg liczb ustawiony w *w* wierszach i *k* kolumnach czyli tablicę:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{wk} \end{bmatrix}$$

Symbol $[a_{ij}]_{wxk}$ to oznaczenie macierzy przedstawionej powyżej.

Natomiast symbol a_{ij} oznacza element stojący w *i*–tym wierszu i *j*–tej kolumnie. Pierwszy indeks zawsze wskazuje numer wiersza a drugi numer kolumny.

Macierze często oznacza się dużymi pogrubionymi literami **A, B, C** i t.p.

Przykład 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Jeżeli liczba wierszy jest równa liczbie kolumn czyli *w = k,* to macierz nazywamy macierzą kwadratową *k*- tego stopnia.

Wszystkie wyrazy a_{ii} macierzy kwadratowej tworzą główną przekątną tej macierzy.

W przykładzie 1 macierz **A** jest macierzą kwadratową.

Macierz diagonalna jest to macierz kwadratowa, w której na głównej przekątnej są liczby różne od 0, a pozostałe elementy równe są 0.

Macierz jednostkowa (**J**) jest to macierz diagonalna, w której wszystkie elementy to jedynki.

Macierz zerowa to macierz, w której wszystkie elementy równe są 0.

Przykład 2

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ – macierz diagonalna

$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – macierz jednostkowa

$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ – macierz zerowa

Macierzą transponowaną do macierzy **A**= $[a_{ij}]_{wxk}$ nazywamy macierz
$\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{kxw}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{wk} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{w1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{w2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{wk} \end{bmatrix}$$

Przykład 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Dwie macierze **A** = $[a_{ij}]_{wxk}$ i **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$ nazywamy równymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich wymiary są równe i odpowiednie elementy są równe czyli gdy zachodzi:

$w = m$ i $k = n$ i $a_{ij}= b_{ij}$ dla każdego i oraz j.

Działania na macierzach

Jeżeli macierz **A** = $[a_{ij}]_{wxk}$ i macierz **B** = $[b_{ij}]_{wxk}$, to sumą macierzy **A** i **B** nazywamy taką macierz C = $[c_{ij}]_{wxk}$, gdzie $c_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$ dla każdego i oraz j.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{wk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{w1} & b_{w2} & \dots & b_{wk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1}+b_{w1} & a_{w2}+b_{w2} & \dots & a_{wk}+b_{wk} \end{bmatrix}$$

Przykład 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+4 & 1+6 \\ 4+0 & 5+2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Iloczynem liczby x i macierzy **A** = $[a_{ij}]_{wxk}$ jest macierz x**A** = $[xa_{ij}]_{wxk}$.

$$x \cdot \mathbf{A} = x \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{wk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_{11} & xa_{12} & \dots & xa_{1k} \\ xa_{21} & xa_{22} & \dots & xa_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ xa_{w1} & xa_{w2} & \dots & xa_{wk} \end{bmatrix}$$

Przykład 5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Jeżeli macierz **A** = $[a_{ij}]_{wxk}$ i macierz **B** = $[b_{jp}]_{kxm}$, to iloczynem macierzy **A** i **B** nazywamy taką macierz **C** = $[c_{ip}]_{wxm}$, gdzie $c_{ip} = a_{i1}b_{1p} + a_{i2}\, b_{2p} + a_{i3}\, b_{3p} + \ldots + a_{ij}\, b_{jp}$ dla każdego i oraz p.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \ldots & a_{wk} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{km} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1k}b_{k1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1k}b_{k2} & \ldots & a_{11}b_{1m}+a_{12}b_{2m}+\ldots+a_{1k}b_{km} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2k}b_{k1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2k}b_{k2} & \ldots & a_{21}b_{1m}+a_{22}b_{2m}+\ldots+a_{2k}b_{km} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{w1}b_{11}+a_{w2}b_{21}+\ldots+a_{wk}b_{k1} & a_{w1}b_{12}+a_{w2}b_{22}+\ldots+a_{wk}b_{k2} & \ldots & a_{w1}b_{1m}+a_{w2}b_{2m}+\ldots+a_{wk}b_{km} \end{bmatrix}$$

Często, żeby łatwiej zapamiętać sposób mnożenia macierzy, mówi się, że mnożymy po kolei każdy wiersz przez każdą kolumnę.

Przykład 6

Aby wymnożyć macierze $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$, bierzemy I wiersz macierzy **A** czyli ciąg liczb 2, 4, 6 i mnożymy go przez I kolumnę macierzy **B** czyli ciąg 4, 1, 9, w ten sposób, że do iloczynu pierwszych elementów dodajemy iloczyn drugich elementów i iloczyn trzecich elementów: 2*4+4*1+6*9. Otrzymana liczba stanowi pierwszy element pierwszego wiersza i pierwszej kolumny iloczynu **A** i **B.** Następnie mnożymy I wiersz macierzy **A** przez II kolumnę macierzy **B** i t.d.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot4+4\cdot1+6\cdot9 & 2\cdot2+4\cdot4+6\cdot0 \\ 1\cdot4+3\cdot1+5\cdot9 & 1\cdot2+3\cdot4+5\cdot0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 66 & 20 \\ 42 & 14 \end{bmatrix}$$

Natomiast iloczyn $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ jest już całkiem inną macierzą:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot4+2\cdot3 & 4\cdot6+2\cdot5 \\ 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot4+4\cdot3 & 1\cdot6+4\cdot5 \\ 9\cdot2+0\cdot1 & 9\cdot4+0\cdot3 & 9\cdot6+0\cdot5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 22 & 34 \\ 6 & 16 & 26 \\ 18 & 36 & 54 \end{bmatrix}$$

Jak można zauważyć w powyższym przykładzie mnożenie macierzy nie jest przemienne, chociaż jest wykonalne. Często jest tak, że iloczyn $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ istnieje, a iloczyn $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ nie istnieje.

Przykład 7

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot1+4\cdot2+6\cdot3 \\ 1\cdot1+3\cdot2+5\cdot3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 \\ 22 \end{bmatrix}$ Natomiast iloczyn $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ nie istnieje.

Wyznaczniki

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ stopnia n nazywamy wielomian zmiennych a_{ij} przyporządkowany tej macierzy. Jeżeli elementy macierzy $\mathbf{A}$ są liczbami wówczas wyznacznik tej macierzy jest liczbą.
Wyznacznik oznaczamy symbolami:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \det\mathbf{A}, \quad |\mathbf{A}|.$$

Wyznacznik $\det\mathbf{A}$ macierzy $\mathbf{A}$ definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

1. Dla $n=1,\ \mathbf{A}=\left[a_{11}\right]$

$$\det\mathbf{A}=a_{11}$$

2. Dla $n>1$

$$\det\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\mathbf{A}_{1i}^{*}=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{1+i}a_{1i}\mathbf{A}_{1i}$$

Wzór ten nazywamy rozwinięciem wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$ względem elementów pierwszego wiersza. $\mathbf{A}_{ij}^{*}=\left(-1\right)^{i+j}\mathbf{A}_{ij}$ nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$, natomiast $\mathbf{A}_{ij}$ – podwyznacznikiem (minorem) stopnia $n-1$ macierzy $\mathbf{A}$ otrzymanym przez skreślenie elementów *i*-tego wiersza oraz *j*-tej kolumny macierzy $\mathbf{A}$..

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\mathbf{A}_{11}^{*}+a_{12}\mathbf{A}_{12}^{*}=a_{11}\left(-1\right)^{1+1}\mathbf{A}_{11}+a_{12}\left(-1\right)^{1+2}\mathbf{A}_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

W sposób analogiczny obliczamy wyznacznik macierzy $\mathbf{A}\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ stopnia trzeciego

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\mathbf{A}_{11}^{*}+a_{12}\mathbf{A}_{12}^{*}+a_{13}\mathbf{A}_{13}^{*}=a_{11}\mathbf{A}_{11}-a_{12}\mathbf{A}_{12}+a_{13}\mathbf{A}_{13}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{13} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ostatecznie (po obliczeniu wyznaczników stopnia drugiego) otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Przykład 7

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 5\cdot 6 = 8 - 30 = -22$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(15-0) - 4\cdot(3-0) + 2\cdot(1-10) = 45 - 12 - 18 = 15$$

Sposób Sarrusa

Wyznacznik stopnia trzeciego możemy obliczyć według następującego schematu. Z prawej strony wyznacznika dopisujemy pierwszą i drugą kolumnę (lub pod wyznacznikiem dopisujemy pierwszy i drugi wiersz). Następnie (patrz rysunek) obliczamy iloczyny elementów z poszczególnych przekątnych i z odpowiednim znakiem je dodajemy:

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Przykład 8

$$\left|\begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 3\cdot 5\cdot 3 + 4\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 3 =$$

$$= 45 + 2 - 20 - 12 = 15$$

Właściwości wyznaczników ułatwiające ich obliczanie

Powyżej podana definicja i sposób Sarrusa często są kłopotliwe do zastosowania szczególnie ze względu na pracochłonność obliczeń. W związku z tym podajemy poniżej kilka twierdzeń ułatwiających obliczanie wyznaczników.

1. Wyznacznik możemy rozwijać względem dowolnego wiersza (kolumny)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}^{*} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \qquad (i = 1,2,...n)$$

2. Wyznacznik danej macierzy $\mathbf{A}$ równa się wyznacznikowi macierzy transponowanej

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{T}$$

3. Jeżeli macierz $\mathbf{B}$ utworzona jest z macierzy $\mathbf{A}$ przez przestawienie miejscami dwóch wierszy (kolumn), to wyznacznik zmienia wartość na przeciwną

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$$

4. Wyznacznik macierzy mającej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer równa się zeru.

5. Mnożenie wyznacznika przez liczbę λ polega na mnożeniu elementów jednego dowolnego wiersza (kolumny) przez tę liczbę.

6. Wyznacznik macierzy, w której dwa wiersze (kolumny) są równe lub proporcjonalne równa się zeru.

7. Wartość wyznacznika nie zmienia się, gdy do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę.

Własność 7 umożliwia uzyskanie wyznacznika o największej liczbie zer i tej samej wartości, co dany wyznacznik. Otrzymany wyznacznik rozwijamy względem tego wiersza (kolumny), w którym jest największa liczba zer.

Przykład 9

$\begin{vmatrix} 100 & 4 \\ 200 & 9 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 100 \cdot 1 = 100$ z własności 5

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ z własności 4

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ bo wiersze I i III są proporcjonalne, z własności 6

Żeby obliczyć jak najszybciej wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ zastosujemy własność 7 i 1. Najpierw pomnożymy I kolumnę przez (–2) i dodamy ją do kolumny II otrzymując wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, który rozwiniemy względem IV wiersza:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^7 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^8 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

jak widać powyżej trzy ostatnie wyznaczniki nie musimy liczyć, bo pomnożone są przez zera, pozostaje tylko do obliczenia pierwszy wyznacznik:

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & 6 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & 6 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ 0 & 10 & 10\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 10 & 10\end{vmatrix}=(-10)\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=10$$

czyli cały wyznacznik równa się 10.

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A= $[a_{ij}]_{nxn}$ jest taka macierz B= $[b_{ij}]_{nxn}$, że A·B = J. Macierz odwrotną oznaczamy A^{-1}. Elementy macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ względem nieosobliwej macierzy $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ wyznaczamy ze wzoru

$$b_{ij}=\frac{\mathbf{A}^*{}_{ji}}{\det\mathbf{A}},\qquad i=1,2,...,n,\qquad j=1,2...,n$$

gdzie $\mathbf{A}_{ji}$ oznacza podwyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ powstały przez wykreślenie *j*-go wiersza oraz *i*-tej kolumny macierzy $\mathbf{A}$..

Przykład 10

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & 6 & 5\end{bmatrix}$

Najpierw obliczamy wyznacznik macierzy **A**: det **A** = 10. Następnie wyznaczamy dopełnienia algebraiczne poszczególnych wyrazów macierzy **A**:

$$\mathbf{A}^*{}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-10,\qquad \mathbf{A}^*{}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-10,$$

$$\mathbf{A}^*{}_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-9,\qquad \mathbf{A}^*{}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{vmatrix}=9,$$

$$\mathbf{A}^*{}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=4,\qquad \mathbf{A}^*{}_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & 6\end{vmatrix}=-3,$$

$$\mathbf{A}^*{}_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-1,\qquad \mathbf{A}^*{}_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=4,$$

$$\mathbf{A}^*{}_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-3$$

Na koniec obliczamy elementy macierzy odwrotnej wg wzoru ...:

$$b_{11}=\frac{\mathbf{A}^*_{11}}{\det\mathbf{A}}=\frac{-10}{10}=-1,\ b_{12}=\frac{\mathbf{A}^*_{21}}{\det\mathbf{A}}=\frac{9}{10}=0{,}9,\ b_{13}=\frac{\mathbf{A}^*_{31}}{\det\mathbf{A}}=\frac{-1}{10}=-0{,}1$$

$$b_{21}=-1,\ b_{22}=0{,}4,\ b_{23}=0{,}4,\ b_{31}=-0{,}9,\ b_{32}=-0{,}9,\ b_{33}=-0{,}3.$$

Stąd macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0{,}9 & -0{,}1\\ -1 & 0{,}4 & -0{,}9\\ -0{,}9 & -0{,}9 & -0{,}3\end{bmatrix}$.

Przykład 11

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy: $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

det **B** = −1, $\mathbf{B}_{11}^{*}=3$, $\mathbf{B}_{12}^{*}=-8$, $\mathbf{B}_{21}^{*}=-2$, $\mathbf{B}_{22}^{*}=5$, czyli $\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 2 & -5\end{bmatrix}$

Rząd macierzy

Rzędem $R(\mathbf{A})$ macierzy $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ nazywamy stopień największego jej podwyznacznika różnego od zera.

Przykład 12

Rząd macierzy $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 8 & 3\end{bmatrix}$ jest równy 2, gdyż największy różny od 0 podwyznacznik macierzy **B** ma postać $\begin{vmatrix}5 & 2\\ 8 & 3\end{vmatrix}$.

Rząd macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & -4 & -5\end{bmatrix}$ jest równy 1, gdyż największy różny od 0 podwyznacznik macierzy **A** ma postać $|2|$ (wyznacznik 3 stopnia jak i wszystkie wyznaczniki 2 stopnia są równe 0 – wiersze są proporcjonalne).

Macierz kwadratową $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{J}$, gdzie $\mathbf{A}=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{n\times n}$ i $\lambda\in Z$ nazywamy macierzą charakterystyczną macierzy $\mathbf{A}$, natomiast wyznacznik $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{J})$ nazywamy wyznacznikiem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$. Pierwiastki wyznacznika charakterystycznego nazywamy wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład 13

Wyznaczyć wartości własne macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{bmatrix}$.

$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ -2 & 1 & -3-\lambda\end{bmatrix}$ stąd wyznacznik charakterystyczny wynosi: $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{J})=3\lambda-\lambda^{3}$, a jego pierwiastkami czyli wartościami własnymi macierzy **A** są liczby: 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.