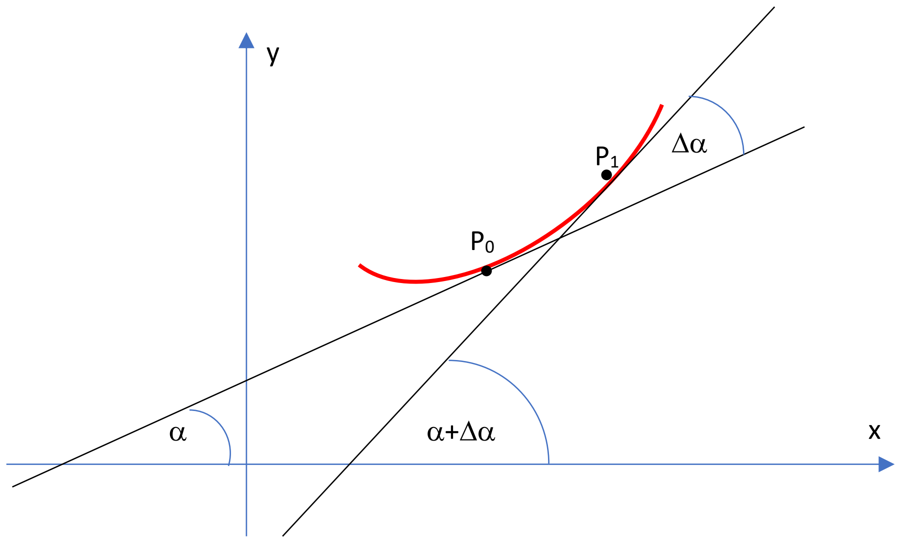
1. Krzywizna i skręcenie krzywej

1.1. Krzywizna krzywej płaskiej

Dla krzywej płaskiej L określonej równaniem y = f(x), gdzie f(x) jest funkcją klasy C^2 w przedziale (a, b), prowadzimy styczną w pewnym ustalonym punkcie $P_0(x_0, y_0)$, gdzie $x_0 \in (a, b)$. Niech α oznacza kąt, jaki ta styczna tworzy z osią Ox. Dla punktu $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ oznaczmy przez Δs długość łuku P_0P_1, a przez $\alpha+\Delta\alpha$ kąt jaki styczna w punkcie P_1 tworzy z osią Ox (Rys.1)



Rysunek 1.1 Krzywizna krzywej płaskiej

Za miarę krzywizny krzywej płaskiej L przyjęto granicę wyrażenia $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ przy $P_1 \to P_0$. Krzywiznę zwykle oznacza się grecka literą kappa κ. Mamy więc

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Prawa strona tej równości to wartość bezwzględna pochodnej $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, co przekłada się na następujący wzór krzywizny krzywej płaskiej o równaniu y = f(x):

$$\kappa = \left|\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|$$

Dla regularnej krzywej płaskiej klasy C^2 określonej równaniami parametrycznymi **r**(t) =[x(t), y(t)], krzywizna jest określona wzorem:

$$\kappa = \left| \frac{x' y'' - x'' y'}{\left[(x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right|$$

Przykład 1

Dla paraboli określonej równaniem $y = x^2$, w dowolnym punkcie $P_0(x_0, y_0)$ mamy $\kappa = \dfrac{2}{\left[1 + 4x_0^2\right]^{\frac{2}{3}}}$

Czyli np. dla $x_0=0$ mamy $\kappa=2$, a dla $x_0=4$ krzywizna w przybliżeniu wynosi 0,004. Patrząc na wykres funkcji $y = x^2$ widzimy, że „najbardziej krzywa" parabola jest właśnie dla x = 0 (ma tam największą krzywiznę).

Przykład 2

Dla dowolnego punktu elipsy o równaniu $r(t) = [a\cos t, b\sin t]$, krzywizna wynosi

$$\kappa = \frac{ab}{\left[a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t\right]^{\frac{3}{2}}}$$

1.2. Krzywizna krzywej przestrzennej

Dla krzywej L w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ do określenia krzywizny wykorzystuje się wektory styczne Freneta $\vec{T}$ w punktach P_0 i P_1 . Jeżeli przez ω oznaczymy kąt między wektorami $\overrightarrow{T(s_0)}$ i $\overrightarrow{T(s_0+h)}$, gdzie parametr naturalny s_0 odpowiada punktowi P_0, a s_0+h odpowiada punktowi P_1, to krzywiznę krzywej L w punkcie P_0 określamy następująco:

$$\kappa = \lim_{h \to 0} \left| \frac{\omega}{h} \right|$$

Po zastosowaniu odpowiednich pochodnych otrzymujemy wzór na krzywiznę krzywej L, w przedstawieniu parametrycznym **r**(t):

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

1.3. Skręcenie krzywej przestrzennej

Dla krzywej L w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ do określenia skręcenia wykorzystuje się wektory binormalne Freneta $\vec{B}$ w punktach P_0 i P_1 . Jeżeli przez ψ oznaczymy kąt między wektorami $\overrightarrow{B(s_0)}$ i $\overrightarrow{B(s_0+h)}$, gdzie parametr naturalny s_0 odpowiada punktowi P_0, a s_0+h odpowiada punktowi P_1, to za bezwzględną wartość skręcenia krzywej L przyjęto granicę wyrażenia $\left|\frac{\psi}{h}\right|$ przy $P_1 \to P_0$. Skręcenie zwykle oznacza się grecka literą tau τ. Mamy więc

$$|\tau| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\psi}{h}\right|$$

Po zastosowaniu odpowiednich pochodnych i wzoru na krzywiznę otrzymujemy wzór na skręcenie krzywej L, klasy C^3 w przedstawieniu parametrycznym **r**(t):

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\circ\mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|^2}$$