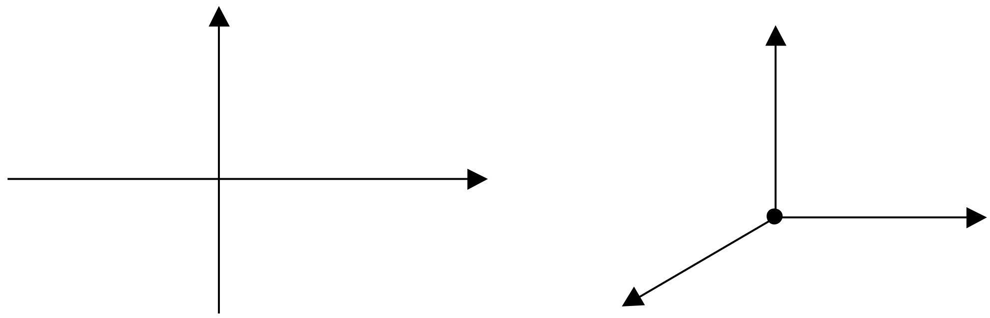
Wstęp

Określenia miejsca, w którym znajduje się przedmiot czy człowiek, można dokonać przy pomocy opisu np. na prawo od wieży lub pomiędzy sklepem a bankiem itp. Nie jest to jednak sposób ‘zrozumiały’ dla urządzeń, których w naszym otoczeniu jest coraz więcej (np.nawigacja satelitarna, roboty domowe i t.p.) i które do swego działania potrzebują technicznego określenia pozycji. Tym sposobem określenia miejsca jest układ współrzędnych. Kartezjusz stworzył układ współrzędnych na płaszczyźnie o osiach prostopadłych do siebie, który nazywamy układem kartezjańskim lub prostokątnym.



Rys. 1

Jego uogólnieniem jest układ trzech wzajemnie prostopadłych osi: *Ox*, *Oy*, *Oz* przecinających się w punkcie *O*. Oprócz układu kartezjańskiego stosuje się inne, np. układ cylindryczny, układ sferyczny, a na kuli ziemskiej stworzono układ współrzędnych geograficznych. Przestrzeń $R^3 = R\times R\times R$ jest to zbiór, którego elementami są uporządkowane trójki liczb (x_0, y_0, z_0), gdzie $x_0 \in R \wedge y_0 \in R \wedge z_0 \in R$. Geometryczną interpretacją elementu (x_0, y_0, z_0) jest punkt *P*, który znajduje się takim miejscu przestrzeni, że odcinek $\overline{OP}$ jest przekątną prostopadłościanu o krawędziach równoległych do osi współrzędnych, o długościach odpowiednio:

$|x_0|$ - dla krawędzi równoległej do osi Ox

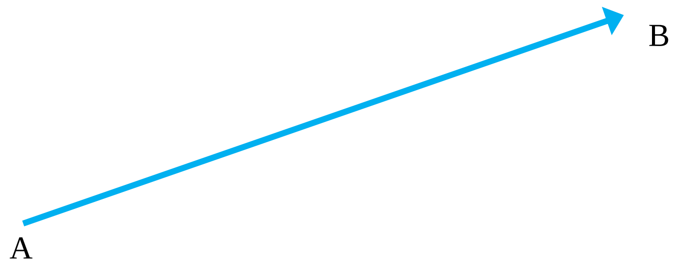
$|y_0|$ - dla krawędzi równoległej do osi Oy

$|z_0|$ - dla krawędzi równoległej do osi Oz

Wykorzystując tw. Pitagorasa dla prostopadłościanu wyznaczono odległość między dwoma punktami A i B:

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Wektorem w przestrzeni R^3 nazywamy uporządkowaną parę punktów (A,B) co oznaczamy $\overrightarrow{AB}$ lub jedną małą literą np. $\vec{a}$. Punkt *A* nazywamy początkiem wektora, *B* końcem wektora. Jeżeli $A=B$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy symbolem: $\vec{0}$. Każdy wektor niezerowy posiada swoją wartość, kierunek i zwrot. Odległość $|AB|$ nazywamy długością lub wartością wektora $\overrightarrow{AB}$ co oznaczamy symbolem: $|\overrightarrow{AB}|$. Graficznie wektor przedstawia się jako odcinek z grotem przy końcu wektora :



Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ są trzy liczby:
$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ co zapisujemy w następujący sposób:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1].$$

Współrzędne wektora w sposób jednoznaczny wyznaczają jego wartość, kierunek i zwrot.
W układzie współrzędnych R^3 wyróżniamy trzy wektory jednostkowe równoległe do poszczególnych osi oraz zgodnie z nimi skierowane, które nazywamy wersorami. Są to:
$\vec{i}$ – wektor jednostkowy na osi *Ox*, łączący punkty $O(0,0,0)$ i $I(1,0,0)$;
$\vec{j}$ – wektor jednostkowy na osi *Oy*, łączący punkty $O(0,0,0)$ i $J(0,1,0)$;
$\vec{k}$ – wektor jednostkowy na osi *Oz*, łączący punkty $O(0,0,0)$ i $K(0,0,1)$.
Dowolny wektor $\vec{a}$ można przedstawić jako sumę:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

Liczby: a_x, a_y, a_z nazywamy współrzędnymi wektora $\vec{a}$. **Długość** wektora $\vec{a}$ dana jest wzorem
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
Kierunek wektora $\vec{a}$ określają kąty zawarte między tym wektorem, a osiami współrzędnych. Kąty te można wyznaczyć z następujących wzorów, zwanych c**osinusami kierunkowymi** wektora $\vec{a}$:

$$\cos\varphi_x = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos\varphi_y = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos\varphi_z = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

gdzie φ_x, φ_y, φ_z oznaczają odpowiednio miary kątów wektora $\vec{a}$ z osiami układu współrzędnych.
Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe, jeżeli ich współrzędne są proporcjonalne czyli:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Algebra wektorów w przestrzeni trójwymiarowej

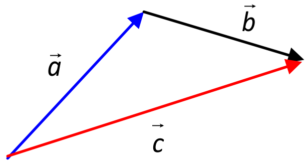
W zbiorze wszystkich wektorów przestrzeni R^3 można zdefiniować wiele działań. W niniejszym podręczniku omówiono: dodawanie wektorów, odejmowanie wektorów, mnożenie skalarne wektorów, mnożenie wektorowe wektorów, mnożenie liczby przez wektor, iloczyn mieszany trzech wektorów.
We wszystkich poniższych definicjach i twierdzeniach wykorzystuje się wektory w następującym zapisie:

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \; \vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \; \vec{c} = [c_x, c_y, c_z].$$

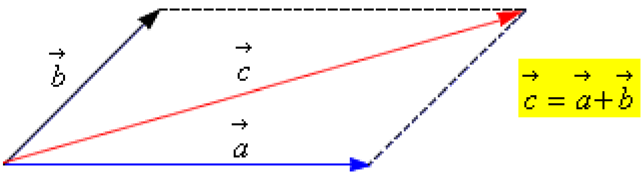
Sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor:

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z].$$

Graficznie, dodawanie wektorów polega na tym, że do końca pierwszego wektora przykłada się początek drugiego wektora i sumą jest wektor łączący początek pierwszego wektora z końcem drugiego



Sumę wektorów wykorzystuje się m.in. w analizie zjawisk fizycznych, w których na jeden punkt działają dwie wielkości wektorowe (np. prędkość statku po wodzie i prędkość prądu) i trzeba wyznaczyć wielkość wypadkową (prędkość statku nad dnem). Wykorzystuje się wtedy tak zwaną regułę równoległoboku



Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{a}$ jest wektor $-\vec{a} = [-a_x, -a_y, -a_z]$, którego wartość i kierunek jest taki sam, jak wektora $\vec{a}$, natomiast zwrot jest przeciwny.

Różnicą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor:

$$\vec{a} - \vec{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z],$$

który jest sumą wektora $\vec{a}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{b}$.

Przykład

Jeżeli statek C porusza się z prędkością $\overrightarrow{v_C}$, a statek D z prędkością $\overrightarrow{v_D}$, to prędkość statku D względem statku C, czyli prędkość zbliżania się statku D do statku C, jest równa różnicy prędkości $\overrightarrow{v_D}$ i $\overrightarrow{v_C}$:

$$\overrightarrow{v_{WZG}} = \overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_C}.$$

Iloczynem liczby c i wektora $\vec{a}$ jest wektor:

$$c \cdot \vec{a} = [c \cdot a_x, c \cdot a_y, c \cdot a_z].$$

Jest to wektor o tym samym kierunku co wektor $\vec{a}$ (zwrot jest taki sam, gdy c>0, a przeciwny, gdy c<0), którego długość jest $|c|$ razy większa od długości wektora $\vec{a}$. Zwrot „$|c|$ razy większa" oznacza, że długość wektora $c\vec{a}$ wynosi $|c \cdot \vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}|$.

Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy jako kąt wyznaczony przez półproste wychodzące z punktu zaczepienia wektorów w kierunkach zgodnych z kierunkami i zwrotami tych wktorów.

Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest liczba określona równością:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

Iloczyn skalarny wektorów posiada następujące własności:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
3) jeżeli $\vec{a}\perp\vec{b}$, to $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
4) jeżeli $\vec{a}\|\vec{b}$, to $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Tw. Iloczyn skalarny można przedstawić w postaci kartezjańskiej:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Dowód:

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przedstawionych w postaci kombinacji liniowej wersorów jest następujący:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right);$$

korzystając z własności 2 wymnażamy „wyraz po wyrazie" i otrzymujemy:

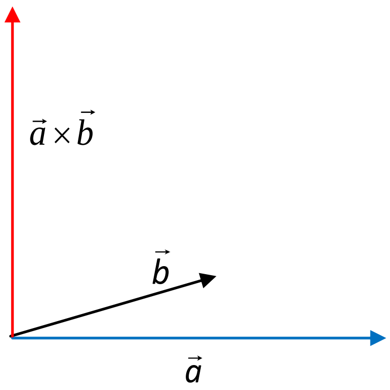
następnie wykorzystując własności 3 i 4 otrzymujemy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Na podstawie definicji i własności iloczynu skalarnego można wyznaczyć wzór na cosinus kąta zawartego między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy taki wektor $\vec{c}$, który jest prostopadły do obu wektorów i skierowany w ten sposób, że wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ są zorientowane tak samo jak wersory $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, a jego długość wyraża się wzorem: $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$. Iloczyn wektorowy oznaczamy symbolem: $\vec{a}\times\vec{b}$.



Twierdzenie

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Przykład

Wyznacz iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, gdzie $\vec{a}=[2,3,4], \vec{b}=[1,2,-3]$.

Rozwiązanie

Wykorzystując powyższy wzór, otrzymujemy:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=-17\vec{i}+10\vec{j}+\vec{k}=[-17,10,1]$$

Iloczyn wektorowy posiada następujące własności:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
3) $(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\times\vec{b}), \qquad \lambda,\mu\in R$

Twierdzenie

Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równe długości iloczynu wektorowego tych wektorów.

Dowód:

Pole równoległoboku o bokach długości *a* i *b* i kącie ostrym o mierze *α* wyraża się wzorem:

$$P=a\cdot b\cdot\sin\alpha$$

Natomiast długość iloczynu wektorowego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równa się:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)$$

I jeżeli kąt między wektorami oznaczymy jako α, to:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\cdot b\cdot \sin\alpha .$$

Stąd widać, że

$$P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| .$$

Wniosek

Pole trójkąta rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równe jest połowie długości iloczynu wektorowego tych wektorów.

Iloczynem mieszanym wektorów $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nazywamy wyrażenie (skalar)

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Tw. Iloczyn mieszany obliczamy ze wzoru

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dowód:

Iloczyn wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma współrzędne: $[a_y b_z - b_y a_z, a_z b_x - b_z a_x, a_x b_y - b_x a_y]$, a pomnożony skalarnie przez wektor $\vec{c}$ daje liczbę:

$(a_y b_z - b_y a_z)\cdot c_x + (a_z b_x - b_z a_x)\cdot c_y + (a_x b_y - b_x a_y)\cdot c_z$, która jest wartością wyznacznika:

$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ są **komplanarne** (równoległe do jednej płaszczyzny) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$$

Dowód:

Jeżeli wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ są komplanarne, to iloczyn $\vec{a}\times\vec{b}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny zawierającej wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, czyli jest prostopadły również do wektora $\vec{c}$, który zawiera się w tej samej płaszczyźnie. Stąd iloczyn skalarny prostopadłych wektorów $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest równy 0, czyli $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0$.

Objętość V **równoległościanu** rozpiętego (zbudowanego) na wektorach $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (patrz rysunek 10) jest równa wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego tych wektorów.

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

Płaszczyzna

Płaszczyzną prostopadłą do niezerowego wektora $\vec{n} = [A, B, C]$, zawierającą punkt P_0 nazywamy zbiór takich punktów przestrzeni, dla których wektory łączące te punkty z punktem P_0 są prostopadłe do wektora $\vec{n}$. Jeżeli płaszczyznę taką oznaczymy symbolem π, to

$$\pi = \left\{ P : \overrightarrow{P_0 P} \perp \vec{n} \right\}$$

Wykorzystując warunek prostopadłości wektorów $\overrightarrow{P_0 P}$ i $\vec{n}$ otrzymano równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, prostopadłej do wektora niezerowego $\vec{n} = [A,B,C]$

$$: \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu elementów w powyższym równaniu otrzymujemy równanie ogólne płaszczyzny π:

$$: \qquad Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right)$$

Przykład

Wyznacz równanie płaszczyzny zawierającej punkt $P_0(3, 4, 5)$, prostopadłej do wektora $\vec{n} = [2,3,6]$.

Rozwiązanie:

$\pi: \qquad 2(x-1) + 3(y-4) + 6(z-5) = 0$ czyli płaszczyzna π ma równanie: $2x + 3y + z - 44 = 0$.

Płaszczyzna jest jednoznacznie wyznaczona, jeżeli znamy:

a) wektor do niej prostopadły i jeden punkt leżący na niej lub
b) trzy niewspółliniowe punkty leżące na niej lub
c) punkt i prostą leżące na niej lub
d) dwie proste leżące na niej.

Dwie płaszczyzny mogą być położone względem siebie na trzy sposoby:

a) przecinać się,
b) być równoległe,
c) pokrywać się.

Częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn jest krawędź czyli linia prosta.

Dwie nierównoległe płaszczyzny π_1, π_2 o równaniach:

$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \qquad \pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ tworzą kąt, który jest równy kątowi miedzy ich wektorami normalnymi $\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1], \vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2]$ czyli kąt między płaszczyznami π_1, π_2: $\varphi = \measuredangle(\pi_1, \pi_2) = \measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ma cosinus równy:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Dwie płaszczyzny są prostopadłe wtedy i tylko wtedy , gdy ich wektory normalne są prostopadłe czyli:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Dwie płaszczyzny są równoległe wtedy i tylko wtedy , gdy ich wektory normalne są równoległe czyli:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

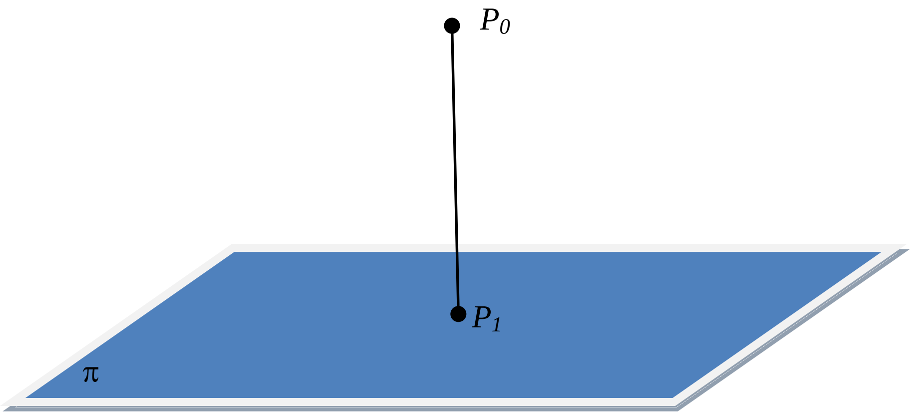
Dwie nierównoległe płaszczyzny π_1, π_2 wyznaczają w przestrzeni zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez ich wspólną krawędź. Zbiór ten nazywamy pękiem płaszczyzn i jego równanie ma postać:

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\lambda_2\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

gdzie liczby $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ i $\lambda_1^2+\lambda_2^2>0$.

Przykład
Wyznacz równania płaszczyzn dwusiecznych katów między płaszczyznami $\pi_1: 4x+2y-6z+10=0$ i $\pi_2: 10x-4y+2z-2=0$.
Rozwiązanie:
Płaszczyznami dwusiecznymi są płaszczyzny jednakowo odległe od płaszczyzn π_1, π_2 czyli:
$\omega_1: \frac{1}{2}(4x+2y-6z+10)+\frac{1}{2}(10x-4y+2z-2)=0$ stąd $\omega_1: 7x-y-2z+4=0$ oraz $\omega_2: \frac{1}{2}(4x+2y-6z+10)-\frac{1}{2}(10x-4y+2z-2)=0$ stąd $\omega_2: -3x+3y-4z+6=0$.

Odległością punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ nazywamy długość odcinka prostopadłego do płaszczyzny π, którego jeden koniec jest w punkcie P_0 a drugi leży na płaszczyźnie π.



Odległość punktu P_0 od płaszczyzny π obliczamy ze wzoru:

$$d=d(P_0, \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Prosta w przestrzeni trójwymiarowej

Prostą przechodzącą przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ równoległą do wektora $\vec{a}=\left[a_x, a_y, a_z\right]$ nazywamy zbiór takich punktów przestrzeni, dla których wektory łączące te punkty z punktem P_0 są równoległe do wektora $\vec{a}$. Jeżeli prostą taką oznaczymy symbolem *l*, to jej równania parametryczne mają postać:

$$l:\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases}$$

Wektor $\vec{a}$ nazywamy wektorem kierunkowy prostej *l*.
Równaniem kanonicznym prostej *l* jest równanie postaci:

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$$

Przykład
Wyznacz równanie prostej zawierającej punkt $P_0(3,4,5)$, o wektorze kierunkowym $\vec{a} = [2,3,6]$.
Rozwiązanie:
Równanie parametryczne tej prostej ma postać: $l:\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 4+3t \\ z = 5+6t \end{cases}$, a równanie kanoniczne:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{6}.$$

Prosta jest jednoznacznie wyznaczona, jeżeli znamy:
a) wektor do niej równoległy i jeden punkt leżący na niej lub
b) dwa punkty leżące na niej lub
c) punkt leżący na niej i płaszczyznę prostopadłą do niej lub
d) dwie płaszczyzny przechodzące przez nią.

Pierwsza możliwość posłużyła do zdefiniowania pojęcia prostej i wyznaczenia jej równania. W przypadku b) mamy dane dwa punkty leżące na prostej: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i $P_1(x_1, y_1, z_1)$
Wektorem kierunkowym w tym przypadku jest wektor $\overrightarrow{P_0P_1}$. Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Jeżeli znamy punkt leżący na prostej $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i płaszczyznę prostopadłą do niej o równaniu $Ax+By+Cz+D=0$ (przypadek c), to wektorem kierunkowym tej prostej jest wektor normalny płaszczyzny $\vec{n} = [A,B,C]$ i równanie prostej ma postać

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

Natomiast gdy prosta jest wyznaczona przez dwie nierównoległe płaszczyzny przechodzące przez nią, to stosujemy wtedy specjalną postać równania prostej zwaną równaniem krawędziowym:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$.

Przykład

Wyznaczyć równanie prostej wyznaczonej przez płaszczyzny: $\pi_1 : 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ i $\pi_2 : 10x - 4y + 2z - 2 = 0$.

Rozwiązanie

Równanie krawędziowe prostej ma postać: $l: \begin{cases} x + 2y - 10z + 10 = 0 \\ x - 4y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$. Żeby otrzymać równanie parametryczne tej prostej należy rozwiązać powyższy układ równań, wprowadzając za jedną ze zmiennych parametr *t*: $l: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = -2 + 2{,}5t \\ z = t \end{cases}$.

Jeżeli proste l_1 i l_2 określone są równaniami:

$$l_1: \begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad l_2: \begin{cases} x = x_1 + ub_x \\ y = y_1 + ub_y \\ z = z_1 + ub_z \end{cases} \quad u \in R$$

gdzie $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ są ich wektorami kierunkowymi oraz $P_0(x_0, y_0, z_0) \in l_1$, $\quad P_1(x_1, y_1, z_1) \in l_2$, to:

1) $\cos(\sphericalangle(l_1, l_2)) = \cos(k(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

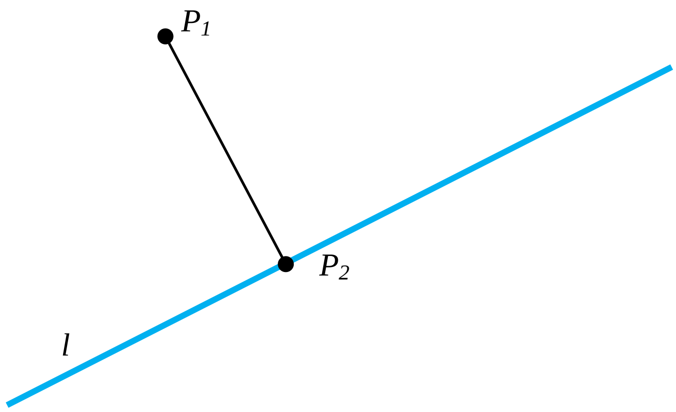
3) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

4) proste l_1, l_2 leżą w jednej płaszczyźnie (są komplanarne) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{P_0P} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Dwie proste nazywamy skośnymi wtedy i tylko wtedy, gdy nie są równoległe i nie są komplanarne.

Odległością punktu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ od prostej *l* nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej *l*, którego jeden koniec jest w punkcie P_1 a drugi leży na prostej *l* (rys.).



Odległość punktu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ od prostej l obliczam ze wzoru:

$$d = d(P_1, l) = \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Dowód:

Na rys. 18 widać, że $\dfrac{d}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|} = \sin\alpha$, a kąt α równy jest kątowi zawartemu między wektorami $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\vec{a}$. Z definicji długości iloczynu wektorowego wynika, że $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|}$ i stąd

$$d = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \sin\alpha = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|} = \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{|\vec{a}|}$$

Odległością między prostymi skośnymi l_1 i l_2 nazywamy długość odcinka prostopadłego do obu prostych, którego jeden koniec leży na prostej l_1 a drugi leży na prostej l_2. Odległość prostych skośnych l_1, l_2 wyznaczamy ze wzoru:

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|}.$$

Prosta i płaszczyzna

Prosta może być położona względem płaszczyzny na trzy różne sposoby:

1) zawiera się w płaszczyźnie
2) jest równoległa do niej i rozłączna

3) przebija płaszczyznę.

Dane są prosta l: $\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases}$ $t \in R$ oraz płaszczyzna $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

Prosta *l* jest równoległa do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy wektor kierunkowy prostej: $\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right]$ jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny: $\vec{n} = [A, B, C]$ czyli

$$l \| \pi \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0.$$

Gdy prosta *l* nie jest równoległa do płaszczyzny π, przebija ją w jednym punkcie i tworzy z płaszczyzną kąt, który jest dopełnieniem do 90 kąta między wektorami $\vec{n}$ i $\vec{a}$.

Kąt φ wyznaczamy ze wzoru:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{\left|Aa_x + Ba_y + Ca_z\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Punkt przebicia P_p płaszczyzny π przez prostą *l* wyznaczamy rozwiązując układ równań opisujących prostą i płaszczyznę. Otrzymujemy w ten sposób:

$$P_p\left(x_p, y_p, z_p\right): \begin{cases} x_p = x_0 + t_p a_x \\ y_p = y_0 + t_p a_y \\ z_p = z_0 + t_p a_z \end{cases}$$

gdzie wartość t_p parametru *t* jest wyznaczona z równania:

$$A\left(x_0 + ta_x\right) + B\left(y_0 + ta_y\right) + C\left(z_0 + ta_z\right) + D = 0.$$

Przykład

Wyznacz rzut prostej l : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$ na płaszczyznę π: $2x + 3y + z - 4 = 0$

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy punkt przebicia płaszczyzny π przez prostą *l* wykorzystując równanie ... .

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\vec{n}$ i $\vec{a}$ są równoległe czyli

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{n} \Leftrightarrow \frac{a_x}{A} = \frac{a_y}{B} = \frac{a_z}{C}.$$

Powierzchnie stopnia drugiego

Na koniec tego rozdziału zaprezentujemy przykłady najczęściej stosowanych powierzchni stopnia drugiego.

Sferą o środku w punkcie $S(a, b, c)$ i promieniu *R* nazywamy zbiór punktów przestrzeni, które mają tę własność, że ich odległość od środka jest równa *R*. Równanie takiej sfery jest następujące:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

1. Elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad .$$

2. Hiperboloidy:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ hiperboloida jednopowłokowa,

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ hiperboloida dwupowłokowa.

3. Paraboloidy:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ paraboloida eliptyczna,

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ paraboloida hiperboliczna.

4. Stożek:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

5. Walce:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ walec eliptyczny,

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ walec hiperboliczny,

c) $y^2=2px$ walec paraboliczny.

Równanie powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu dokoła osi 0*x* krzywej o równaniu $x=f(z)$:

$$x^2+y^2=f^2(z)$$

Przykłady powierzchni obrotowych powstałych w wyniku obrotu dokoła osi 0*x* krzywych stożkowych (elipsy, hiperboli, paraboli)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoida obrotowa.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hiperboloida obrotowa jednopowłokowa.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z$ paraboloida obrotowa.