Całka nieoznaczona

Tabela całek funkcji elementarnych

$$\int a\,dx = ax + C \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \sin dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \cos dx = \sin x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Całkowanie przez podstawianie

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx = \left|\begin{matrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt = H(t) + C =$$

$= H\left(g(x)\right) + C,$ gdzie $H(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(t)$

Całkowanie przez części

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Wzory rekurencyjne

$$J_n = \int \sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\left(-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

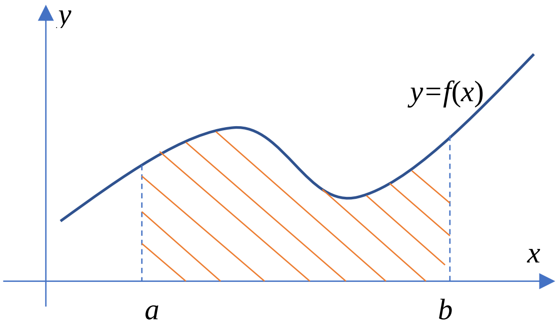
$$K_n = \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x - K_{n-2}$$

Całka oznaczona

$\int_a^b f(x)\,dx = H(x)\Big|_a^b = H(b) - H(a)$, gdzie $H(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$

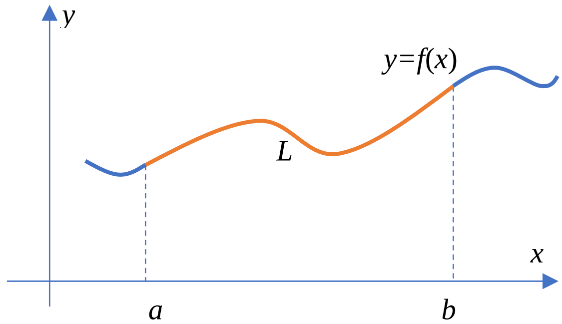
Geometryczne zastosowania całki oznaczonej

Pole obszaru pod wykresem



$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Długość łuku krzywej



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Środek ciężkości figury płaskiej

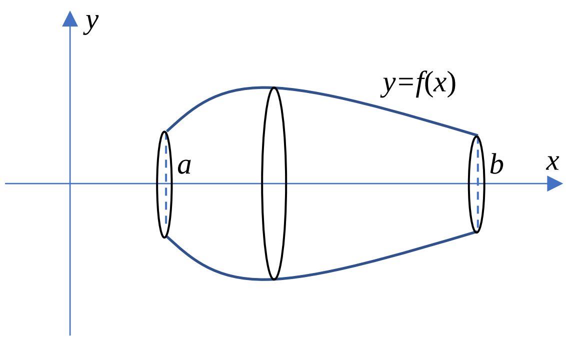
Jeżeli masa jest rozłożona równomiernie, to środek ciężkości figury płaskiej ograniczonej wykresem funkcji y=f(x) i osią x (patrz rysunek wyżej) znajduje się w punkcie $S(x_S, y_S)$:

$$x_S = \frac{M_y}{P},\quad y_S = \frac{M_x}{P}$$

gdzie P oznacza pole figury, a M_x *i* M_y *to momenty statyczne tej figury względem osi współrzędnych, określone wzorami:*

$$M_x = \int_a^b \frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2 dx,\quad M_y = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx$$

Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej



$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad P_b = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$