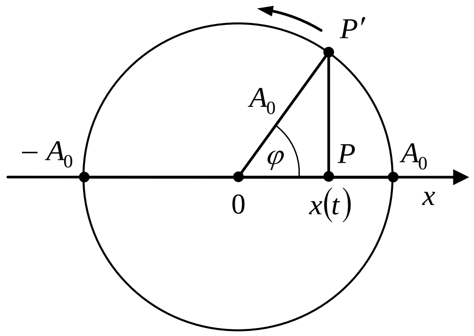
7. Drgania i fale

Drgania

Ruchem drgającym okresowym nazywamy taki ruch, w którym układ po upływie pewnego czasu, nazywanego okresem drgania, wraca do stanu wyjściowego.

Drganie harmoniczne proste

W ujęciu geometrycznym, drganie harmoniczne proste to ruch, jaki wykonuje rzut punktu poruszającego się po okręgu na średnicę tego okręgu (Rys. 7.1.).



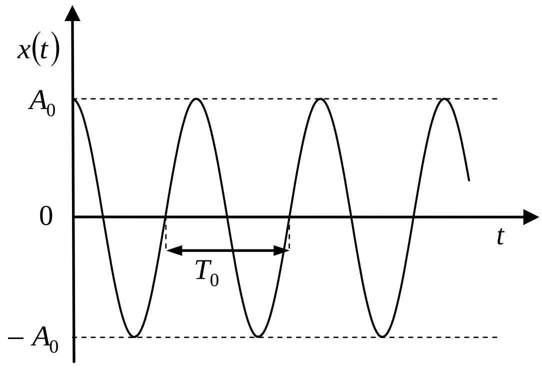
Rys. 7.1. Ilustracja do definicji geometrycznej drgania harmonicznego prostego

Drganie harmoniczne proste jest drganiem o stałej w czasie amplitudzie. Równanie opisujące drganie harmoniczne proste przedstawia zależność wychylenia $x(t)$ drgającego punktu P z położenia równowagi 0 od czasu t (Rys. 7.2.):

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{7.1}$$

gdzie:

- A_0 - amplituda drgania (maksymalne wychylenie z położenia równowagi),
- $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / f_0$ - częstość kołowa drgania,
- T_0 - okres drgania,
- $f_0 = 1/T_0$ - częstotliwość drgania,
- $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ - faza drgania,
- $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$ - faza początkowa drgania.



Rys. 7.2. Zależność wychylenia drgającego punktu z położenia równowagi od czasu w drganiu harmonicznym prostym

W ujęciu matematycznym drganie harmoniczne proste to ruch opisany równaniem:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0{}^2 x = 0\,. \tag{7.2}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja (7.1). Z równania (7.2) wynika fizyczna definicja drgania harmonicznego prostego: jest to taki ruch, który wykonuje punkt materialny o masie m pod wpływem siły sprężystej (elastycznej) F_s, proporcjonalnej do wychylenia x i przeciwnie do tego wychylenia skierowanej:

$$F_s = -kx\,, \qquad k = m\omega_0{}^2\,, \tag{7.3}$$

gdzie k jest dodatnim *współczynnikiem sprężystości* określającym częstość kołową oraz okres drgań własnych układu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{7.4}$$

Energia drgania harmonicznego prostego

Siły sprężyste są siłami zachowawczymi. Energia kinetyczna i potencjalna drgającego układu zmieniają się w czasie, natomiast całkowita energia mechaniczna pozostaje wielkością stałą:

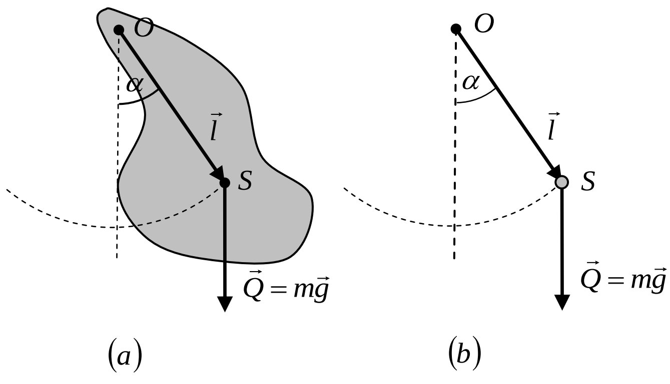
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA_0{}^2\omega_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{7.5}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA_0{}^2\omega_0{}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{7.6}$$

$$E_c = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mA_0{}^2\omega_0{}^2 = \mathrm{const.} \tag{7.7}$$

Wahadło fizyczne i wahadło matematyczne

Przy pomijalnych stratach energii związanych z tarciem i oporami środowiska, wahadło fizyczne i wahadło matematyczne są przykładami ciał wykonujących drganie harmoniczne proste (Rys. 7.3.).



Rys. 7.3. Wahadło fizyczne (a) i wahadło matematyczne (b). O – punkt zawieszenia, S - środek masy

Dla małych wychyleń α, umownie przyjętych dla $\alpha \leq 14^{\circ}$, okres drgań wahadła fizycznego określa wzór:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{D}}, \qquad D = mgl, \tag{7.8}$$

gdzie I_o jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O, a D – momentem kierującym. Dla wahadła matematycznego ($I_o = ml^2$) otrzymamy:

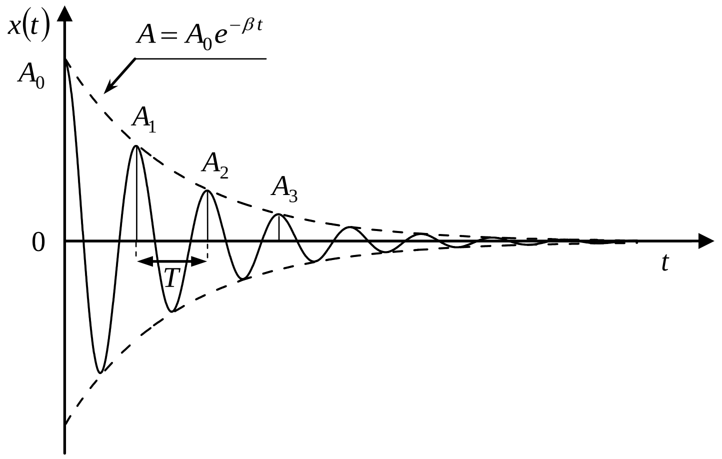
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7.9}$$

Drganie harmoniczne tłumione

Drganie to powstaje pod wpływem siły sprężystej $F_s = -kx$ przedstawionej w równaniu (7.3) oraz siły tłumiącej, która przy względnie małych prędkościach jest proporcjonalna do prędkości ciała i przeciwnie do tej prędkości skierowana: $F_t = -b\frac{dx}{dt}$. Równanie ruchu Newtona opisujące drganie tłumione ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^{\ 2}x = 0, \qquad \beta = \frac{b}{2m}, \qquad \omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m}, \tag{7.10}$$

gdzie m jest masą drgającego ciała, a β - współczynnikiem tłumienia ośrodka.



Rys. 7.4. Zależność wychylenia drgającego punktu z położenia równowagi od czasu w ruchu harmonicznym tłumionym

Dla współczynnika tłumienia spełniającego warunek $\beta \leq \omega_0$, rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2}, \tag{7.11}$$

gdzie ω i ω_0 są odpowiednio częstościami kołowymi drgania tłumionego i drgania swobodnego ($\omega \le \omega_0$), natomiast φ_0 jest fazą początkową drgania. Amplituda drgania tłumionego $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ jest malejącą funkcją czasu, a energia drgania ulega rozproszeniu.

Dekrement logarytmiczny tłumienia

Dekrement logarytmiczny tłumienia Λ określa szybkość zaniku drgań tłumionych i zdefiniowany jest równaniem:

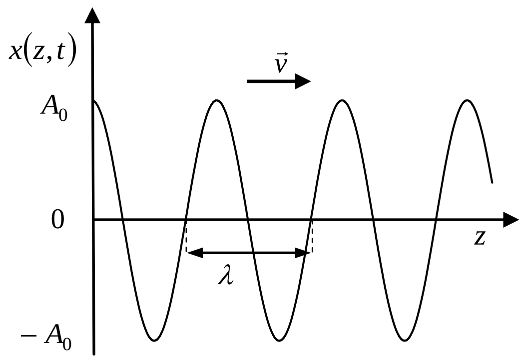
$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta n T}}{A_0 e^{-(n+1)\beta T}} = \beta T \,, \tag{7.12}$$

gdzie A_n i A_{n+1} są dowolnymi - kolejnymi amplitudami, odpowiadającymi dwóm momentom czasu różniącym się o jeden okres T drgania tłumionego.

Fale

Fala jest rozchodzącym się w przestrzeni ruchem drgającym. Gdy dowolny punkt środowiska - źródło ruchu falowego - zostanie wytrącony z położenia równowagi i zacznie wykonywać ruch drgający, to wskutek istnienia sprężystości lub sztywności postaci środowiska, drganie to rozchodzi się we wszystkich możliwych kierunkach doprowadzając do powstania ruchu drgającego dowolnego, innego punktu tego środowiska. W ciałach wykazujących sprężystość postaci, tj. w ciałach stałych, cieczach i gazach, możliwe jest rozchodzenie się fal podłużnych, w których drgania cząsteczek środowiska zachodzą na kierunku propagacji fali. W ciałach stałych, które wykazują także sztywność postaci, mogą rozchodzić się fale poprzeczne, w których drgania cząsteczek środowiska zachodzą na kierunku prostopadłym do kierunku propagacji fali. Ruch falowy ma unikalną zdolność transportu energii bez transportu masy.

Fala harmoniczna płaska



Rys. 7.5. Ilustracja do opisu fali harmonicznej płaskiej

Fala harmoniczna płaska, to fala o określonym kierunku propagacji i stałej amplitudzie, której źródłem jest drganie harmoniczne proste. Równanie opisujące tą falę przedstawia zależność wychylenia dowolnego punktu środowiska z położenia równowagi od położenia i czasu:

$$x(z,t) = A_0 \cos\left[\omega_0 \left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0\right], \tag{7.13}$$

gdzie:

- $x(z,t)$ - wychylenie drgającego punktu z środowiska z położenia równowagi w momencie t. Czas t jest całkowitym czasem drgania źródła ruchu falowego, zlokalizowanego tutaj w położeniu $z=0$,
- A_0 - amplituda fali równa amplitudzie drgania harmonicznego prostego,
- $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi f_0$ - częstość kołowa fali równa częstości kołowej drgania harmonicznego prostego o okresie T_0 i częstotliwości f_0,
- v - prędkość fazowa fali,
- $\varphi = \omega_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_0$ - faza fali,
- φ_0 - faza początkowa fali.

Prędkość fazowa fali

Jest to prędkość rozprzestrzeniania się fazy fali, tj. prędkość, z jaką musiałby poruszać się obserwator by natrafić na tą samą fazę fali i rejestrować niezmienne wychylenie x drgających cząsteczek środowiska z położenia równowagi. Prędkość fazową fali określa warunek:

$$\varphi = \omega_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_0 = \mathrm{const}, \tag{7.14}$$

z którego, po zróżniczkowaniu, wynika naturalny wniosek, że $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. Prędkość rozchodzenia się fali sprężystej określa wzór Newtona:

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}, \tag{7.15}$$

gdzie M jest modułem ściśliwości (fala podłużna) lub modułem sztywności (fala poprzeczna), a ρ jest gęstością środowiska.

Długość fali

Długością fali określamy dystans pokonany przez czoło fali w czasie jednego pełnego okresu: $\lambda = vT_0$. Równoważna definicja określa długość fali, jako odległość między dwoma drgającymi punktami środowiska różniącymi się w fazie o 2π:

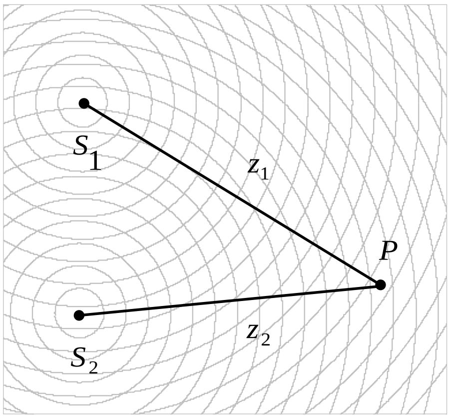
$$\varphi(z_1,t) - \varphi(z_2,t) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad z_2 - z_1 = \lambda. \tag{7.16}$$

Zasada superpozycji

Zasada superpozycji głosi, że jeżeli do jakiegoś punktu środowiska dociera kilka ciągów fal, to punkt ten doznaje wychylenia będącego sumą wychyleń pochodzących od poszczególnych ciągów fal.

Interferencja fal.

Interferencja fal powstaje w wyniku nakładania się ciągów fal spójnych (koherentnych), tj. takich ciągów fal, których różnica faz nie zależy od czasu. Jeżeli różnica faz nakładających się ciągów fal zależy od czasu, to powstały obraz nie jest obrazem interferencyjnym.



Rys. 7.6. Ilustracja do interferencji fal harmonicznych kolistych

Najprostszym przypadkiem interferencji jest nakładanie się dwóch fal harmonicznych o tych samych amplitudach A_0 i tych samych częstościach kołowych ω_0. Przy początkowych fazach równych zeru, fale te opisane są przez równania równania:

$$x_1 = A_0 \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{z_1}{v}\right)\right], \quad x_2 = A_0 \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{z_2}{v}\right)\right], \tag{7.17}$$

gdzie z_1 i z_2 są odległościami miejsca interferencji P od źródeł ruchu falowego S_1 i S_2 (Rys. 7.6.). Falę wypadkową powstałą w wyniku nałożenia się obydwu ciągów fal opisuje równanie:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{z_1 + z_2}{2v}\right)\right], \tag{7.18}$$

gdzie

$$A = 2A_0\left|\cos\frac{\pi(z_2 - z_1)}{\lambda}\right| \tag{7.19}$$

jest niezależną od czasu amplitudą fali wypadkowej. Wielkość tej amplitudy zależy tylko od różnicy dróg przebytych przez obydwa ciągi fal. Maksymalną wartość amplitudy $A = 2A_0$ (maksymalne wzmocnienie) rejestrujemy, gdy

$$z_2 - z_1 = n\lambda, \quad n = 0,1,2,3,\ldots, \tag{7.20}$$

co odpowiada sytuacji, w której ciągi fal spotykają się w zgodnych fazach. Amplituda drgania wypadkowego równa jest zeru (wygaszenie), gdy spełniony jest warunek:

$$z_2 - z_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots, \tag{7.21}$$

opisujący przypadek nakładania się ciągów fal o przeciwnych fazach.

Fala stojąca

Fala stojąca jest szczególnym przypadkiem nakładania się dwóch ciągów fal, które mają te same amplitudy i częstości, lecz rozchodzą się w przeciwnych kierunkach. Przy początkowych fazach równych zeru, fale te opisują równania:

$$x_1 = A_0 \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{z}{v}\right)\right], \quad x_2 = A_0 \cos\left[\omega_0\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]. \tag{7.22}$$

Superpozycja obydwu ciągów fal prowadzi do powstania fali stojącej opisanej równaniem:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t), \tag{7.23}$$

$$A = 2A_0\left|\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\right|. \tag{7.24}$$

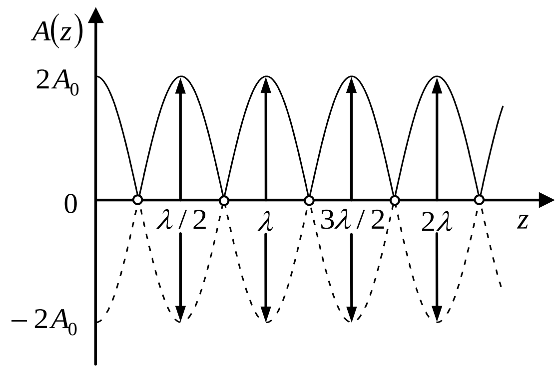
Rozwiązanie to nie zawiera członu falowego i opisuje drganie harmoniczne proste o częstości ω_0 i zmieniającej się przestrzennie amplitudzie A. Maksymalne wartości amplitud $A = 2A_0$ powstają w *strzałkach* określonych przez warunek:

$$z = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,3,\dots . \tag{7.25}$$

Amplitudy są równe zeru w *węzłach* fali stojącej spełniających warunek:

$$z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0,1,2,3,\dots . \tag{7.26}$$

Fali stojącej nie towarzyszy transport energii.

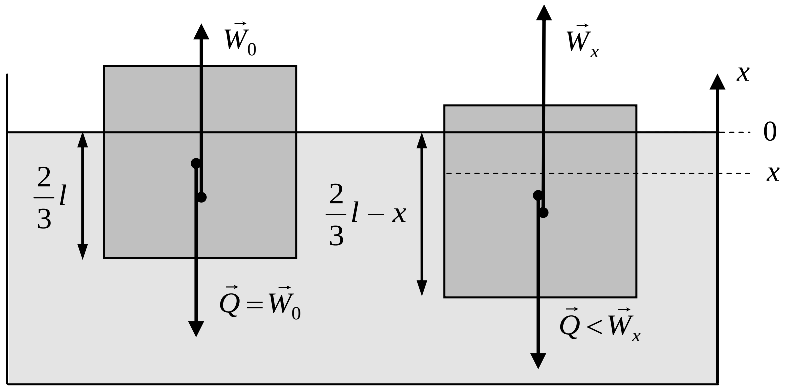


Rys. 7.7. Strzałki i węzły fali stojącej

Przykłady

Przykład 7.1. Klocek sześcienny o boku $l = 30\,\text{cm}$ pływa zanurzony do 2/3 w wodzie. Pokazać, że całkowicie zanurzony, a następnie swobodnie puszczony klocek zacznie wykonywać drgania harmoniczne. Wyznaczyć: częstość i okres drgań, wypadkową siłę działająca na klocek w dowolnym momencie czasu oraz całkowitą energię drgań. W zadaniu pominąć zjawiska związane z lepkością wody. Gęstość wody $\rho_w = 1\,\text{g/cm}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

Rozwiązanie:



Gdy klocek pływa swobodnie zanurzony do 2/3 w wodzie, siła wyporu $\vec{W}_0$ równoważy ciężar klocka $\vec{Q}$:

$$W_0 = Q, \quad \frac{2}{3} l^3 \rho_w g = l^3 \rho_k g .$$

Równanie to pozwala wyznaczyć nieznaną gęstość klocka: $\rho_k = 2\rho_w / 3$. Gdy klocek zostanie zanurzony na dodatkową głębokość x w stosunku do poziomu równowagi $x = 0$, działająca na klocek siła wyporu będzie większa od jego ciężaru i powstanie wypadkowa siła o wartości

$$F = W_x - Q = \left(\frac{2}{3} l - x \right) l^2 \rho_w g - l^3 \rho_k g = -l^2 \rho_w g \, x .$$

Siła ta jest proporcjonalna do przyrostu zanurzenia x i jest zorientowana do niego przeciwnie:

$$F = -kx, \quad k = l^2 \rho_w g > 0 .$$

Porównując otrzymane wyrażenie z równaniem (7.3) widzimy, że działająca na klocek siła ma formalną postać siły sprężystej. Swobodnie puszczony klocek zacznie więc wykonywać drgania harmoniczne, a przyrost zanurzenia x w funkcji czasu będzie opisany równaniem (7.1):

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad A_0 = \frac{1}{3} l, \quad \varphi_0 = \pi ,$$

gdzie częstość kołowa oraz okres drgań klocka odpowiednio wynoszą

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \left(\frac{l^2 \rho_w g}{l^3 \rho_k} \right)^{1/2} = \left(\frac{3g}{2l} \right)^{1/2}, \quad T_0 = 2\pi \left(\frac{2l}{3g} \right)^{1/2} .$$

Wartość amplitudy A_0 oraz fazy początkowej φ_0 wynika z przyjętego założenia, że w umownym momencie $t = 0$, przyrost zanurzenia klocka wynosił $x(t = 0) = -l / 3$.

Poszukiwaną, wypadkową siłę działająca na klocek w dowolnym momencie czasu opisuje funkcja:

$$F = -kx = -\frac{1}{3}\rho_w g l^3 \cos\left[\left(\frac{3g}{2l}\right)^{1/2} t + \pi\right] = 88{,}29\cos(7{,}0t).$$

Całkowitą energię drgań klocka przedstawia równanie (7.7):

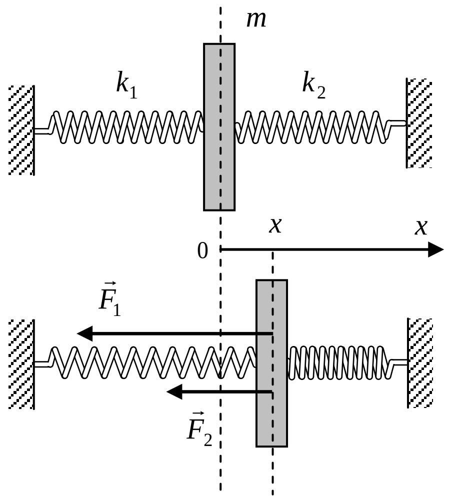
$$E_c = \frac{1}{2} m A_0^{\,2} \omega_0^{\,2} = \frac{1}{6}\rho_w g l^4 .$$

Uwzględniając dane liczbowe otrzymamy: $\omega_0 = 7{,}0$ rad/s, $T_0 = 0{,}90$ s, $E_c = 13{,}2$ J .

Przykład 7.2. Dwie sprężyny o stałych sprężystości $k_1 = 130\,\text{N/m}$ i $k_2 = 70\,\text{N/m}$ połączone są z blokiem o masie $m = 0{,}2\,\text{kg}$. Przy napiętych sprężynach, blok przesunięto z położenia równowagi o $x_0 = 15\,\text{cm}$ i w chwili $t = 0$ swobodnie puszczono. Za pomocą przyrządu pomiarowego stwierdzono, że amplituda drgań zmalała do połowy w ciągu czasu równego $n = 75$ pierwszym okresom drgania. Obliczyć:

a) stałą sprężystości sprężyny, częstość kołową i okres drgań swobodnych (nietłumionych),
b) częstość kołową i okres drgań tłumionych oraz współczynnik tłumienia,
c) wypadkową siłę działająca na blok w dowolnym momencie czasu,
d) energię rozpraszaną w ciągu jednego okresu drgania.

Rozwiązanie:



a) W dowolnym położeniu bloku, zmiana długości x każdej sprężyny jest taka sama, a obydwie siły działające na blok są zorientowane zgodnie i w przeciwnym kierunku do jego wychylenia x z położenia równowagi. Ruch bloku odbywa się więc pod wpływem wypadkowej siły

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x .$$

Wypadkowa siła F jest również siłą sprężystą, a stała sprężystości sprężyny $k = k_1 + k_2$. Częstość kołową ω_0 i okres drgań swobodnych T_0 wyznacza relacja (7.4):

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)^{1/2}, \qquad T_0 = 2\pi\left(\frac{m}{k_1 + k_2}\right)^{1/2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych znajdziemy: $k = 200$ N/m, $\omega_0 = 31{,}623\,\text{s}^{-1}$ $\mathrm{T}_0 = 0{,}199\,\text{s}$.

b) Zależność czasową amplitudy A określa wyrażenie:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

gdzie β jest współczynnikiem tłumienia środowiska. Z warunków zadania wynika, że

$$A(t = nT) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\beta nT},$$

$$n\beta T = \ln 2,$$

gdzie T jest okresem drgania tłumionego. Równanie to, wraz z relacją (7.11) na częstość kołową ω drgania tłumionego

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2},$$

umożliwia wyznaczenie poszukiwanych wielkości ω, T, β:

$$\omega = 2\pi n \left[\frac{k_1 + k_2}{\left(\ln^2 2 + 4\pi^2 n^2\right) m} \right]^{1/2},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{n} \left[\frac{\left(\ln^2 2 + 4\pi^2 n^2\right) m}{k_1 + k_2} \right]^{1/2},$$

$$\beta = \ln 2 \left[\frac{k_1 + k_2}{\left(\ln^2 2 + 4\pi^2 n^2\right) m} \right]^{1/2}.$$

Uwzględniając dane liczbowe otrzymamy: $\omega = 31{,}623\, s^{-1}$, $T = 0{,}199\, s$, $\beta = 0{,}0465\, s^{-1}$. W przypadku bardzo słabego tłumienia, zdefiniowanego przez warunek $\beta T << 1$, $\omega \approx \omega_0$, $T \approx T_0$. W omawianym zadaniu $\beta T = 0{,}009 << 1$ i obliczone wartości ω i T są w obrębie stosowanej dokładności obliczeń takie same, jak odpowiednie wartości ω_0 i T_0 dla drgania niettłumionego.

c) Siłę działającą na blok określa równanie:

$$F(t) = -kx(t) = -(k_1 + k_2) x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Z warunków zadania wynika, że w chwili $t = 0$ wychylenie bloku $x(t = 0) = x_0$, więc faza początkowa $\varphi = 0$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

$$F(t) = -30 e^{-0{,}0465 t} \cos(31{,}623 t).$$

d) W odróżnieniu od drgania swobodnego, energia układu wykonującego drganie tłumione w sposób ciągły maleje z czasem. Miarą rozproszonej w ciągu jednego okresu energii może być różnica energii potencjalnych w momentach $t_n = nT$ i $t_{n+1} = (n+1)T$ odpowiadających czasowo najbliższym momentom maksymalnego i zgodnego, co do kierunku wychylenia układu z położenia równowagi. W momentach tych energia kinetyczna jest równa zeru, a całkowita energia układu równa jest jego energii potencjalnej. Energia potencjalna w momencie $t_n = nT$ równa jest pracy wykonanej przeciwko sile sprężystej na drodze od położenia równowagi $x = 0$ do $x = A_n$:

$$V_{\max}^{(n)} = -\int_0^{A_n} F(x)\mathrm{d}x = (k_1 + k_2)\int_0^{A_n} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)A_n^2 .$$

Uwzględniając, że $A_n = x_0 \exp(-\beta nT)$ znajdziemy:

$$V_{\max}^{(n)} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_0^2 e^{-2\beta nT} .$$

Względne rozproszenie energii drgania tłumionego opisuje równanie:

$$\gamma = \frac{\Delta V_{\max}^{(n)}}{V_{\max}^{(n)}} = \frac{V_{\max}^{(n)} - V_{\max}^{(n+1)}}{V_{\max}^{(n)}} = 1 - e^{-2\beta T} .$$

Parametr γ jest taki sam dla każdego okresu i zależy tylko od dekrementu logarytmicznego tłumienia $\Lambda = \beta T$. Identyczny rezultat otrzymamy przeprowadzając podobne obliczenia uwzględniające różnicę maksymalnych energii kinetycznych. W rozważanym przypadku $\gamma = 0{,}018$, tj. w każdym okresie układ traci 1,8% energii maksymalnej z początkowego momentu t_n tego okresu.

Przykład 7.3. Dwa ciągi fal spójnych o tej samej amplitudzie $A_0 = 5\,\mathrm{mm}$ i tej samej częstotliwości $f = 1500\,\mathrm{Hz}$ przemieszczają się w jednym kierunku z tą samą prędkością fazową $v = 335\,\mathrm{m/s}$. Faza początkowa jednego ciągu fal wynosi $\varphi_{01} = 0$, a drugiego $\varphi_{02} \equiv \varphi_0 = \pi/3$. Wyprowadzić równanie opisujące falę wypadkową. Z jaką amplitudą będą drgały cząsteczki środowiska w miejscu interferencji oraz jaka będzie odległość dzieląca dwa sąsiadujące bezpośrednio punkty drgające z maksymalną amplitudą? Zadanie rozwiązać także w sytuacji, gdy fale przemieszczają się w przeciwnych kierunkach.

Rozwiązanie:

Każda z fal opisana jest równaniem (7.13). W przypadku fal poruszających się w tym samym kierunku równania te mają postać:

$$x_1(z,t) = A_0 \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{z}{v}\right)\right],$$

$$x_2(z,t) = A_0 \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{\pi}{3}\right].$$

Wykorzystując znany, trygonometryczny wzór:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

oraz stosując zasadę superpozycji, otrzymamy równanie fali wypadkowej:

$$x(z,t) = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{\pi}{6}\right].$$

Cząsteczki środowiska będą drgały z amplitudą $A = 2A_0 \cos(\pi/6) = A_0 = 5\,\mathrm{mm}$, a odległość dzieląca dwa sąsiadujące bezpośrednio punkty drgające z maksymalną amplitudą będzie równa długości fali $\lambda = v/f = 22{,}3\,\mathrm{cm}$.

W przypadku, gdy jedna z fal, np. pierwsza, porusza się w kierunku przeciwnym, jej równanie falowe będzie miało postać:

$$x_1(z,t) = A_0 \cos\left[2\pi f\left(t + \frac{z}{v}\right)\right],$$

a fala wypadkowa będzie opisana równaniem:

$$x(z,t) = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\left(2\pi f \frac{z}{v} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Równanie to przedstawia falę stojącą o przestrzennie zmieniającej się, niezależnej od czasu amplitudzie

$$A(z) = 2A_0 \left|\cos\left(2\pi f \frac{z}{v} - \frac{\pi}{6}\right)\right|.$$

Maksymalne wartości amplitudy wynoszą $2A_0$, a ich położenie z wyznacza warunek:

$$2\pi f \frac{z}{v} - \frac{\pi}{6} = n\pi \quad \Rightarrow \quad z_n = \frac{6n+1}{12}\lambda, \quad n = 0,1,2,3,\ldots .$$

Odległość dzieląca dwa sąsiadujące bezpośrednio punkty drgające z maksymalną amplitudą będzie równa $z_{n+1} - z_n = \lambda/2 = 11{,}2\,\mathrm{cm}$.

Zadania

7.1. Punkt zatacza w czasie $T = 2\,\mathrm{s}$ okrąg o promieniu $r = 10\,\mathrm{cm}$. Przy jakiej fazie przyśpieszenie rzutu tego punktu na średnicę poziomą okręgu wynosi $a = 50\,\mathrm{cm/s^2}$. W chwili $t = 0$ faza początkowa była równa zeru.

7.2. Jakie będzie wychylenie ciała drgającego ruchem harmonicznym prostym z położenia równowagi po upływie $t = 10\,\mathrm{s}$? Okres drgania i amplituda wynoszą odpowiednio $T = 0{,}1\,\mathrm{s}$ i $A_0 = 5\,\mathrm{mm}$. W chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w położeniu równowagi.

7.3. Punkt materialny wykonuje drgania harmoniczne o okresie $T = 2\,\mathrm{s}$ i amplitudzie $A_0 = 10\,\mathrm{mm}$. Znaleźć prędkość punktu w chwili, gdy jego wychylenie z położenia równowagi wynosi $x = 25\,\mathrm{mm}$. Faza początkowa drgań $\varphi_0 = \pi/2$.

7.4. Jaki jest okres drgania harmonicznego prostego o amplitudzie A i fazie początkowej $\varphi_0 = 0$, jeżeli po czasie $t = 1\mathrm{s}$ wychylenie drgającego punktu z położenia równowagi wynosiło $x = A_0/\sqrt{2}$?

7.5. Punkt drgający ruchem harmonicznym prostym ma w pewnej chwili prędkość $v = 20\,\mathrm{cm/s}$. Obliczyć przyśpieszenie tego punktu w tej chwili, jeżeli okres drgań $T = 2\,\mathrm{s}$ i amplituda $A_0 = 10\,\mathrm{cm}$.

7.6. Maksymalna prędkość punktu drgającego ruchem harmonicznym wynosi $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$, a maksymalne przyspieszenie $a_0 = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Jak zmienia się wychylenie x drgającego punktu od czasu t? Faza początkowa $\varphi_0 = 0$.

7.7. Punkt drgający ma dla fazy $\varphi = \pi/3$ prędkość $v = 20\,\mathrm{cm/s}$. Amplituda drgania $A_0 = 10\,\mathrm{cm}$. Obliczyć okres drgań tego punktu.

7.8. Punkt wykonuje drgania o okresie $T = 2\,\mathrm{s}$ i amplitudzie $A_0 = 10\,\mathrm{cm}$. Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu w momencie jego maksymalnego wychylenia. Faza początkowa $\varphi_0 = \pi/3$.

7.9. Ciało drgając harmonicznie przebiega pomiędzy skrajnymi położeniami drogę $l = 4\,\mathrm{cm}$ i osiąga maksymalną prędkość $v = 10\,\mathrm{cm/s}$. Jaki jest okres, częstość i częstotliwość tych drgań?

7.10. Ciało drga harmonicznie zgodnie z równaniem: $x = 1 + 2\sin(3\pi t)$. Jaka jest amplituda, częstość, częstotliwość i faza początkowa tego drgania? Obliczyć prędkość oraz przyspieszenie tego ciała w piątej sekundzie ruchu?

7.11. Ruch punktu opisuje równanie: $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$. W pewnej chwili wychylenie punktu z położenia równowagi wynosiło $x = 5\,\mathrm{cm}$, prędkość $v = 10\,\mathrm{cm/s}$, a przyspieszenie $a = -40\,\mathrm{cm/s^2}$. Obliczyć amplitudę drgań, częstość, fazę początkową oraz fazę w rozpatrywanym momencie czasu.

7.12. Punkt materialny o masie m wykonuje drgania harmoniczne o częstości ω. Obliczyć całkowitą energię drgającego punktu materialnego, jeżeli w pewnej chwili jego wychylenie z położenia równowagi i prędkość wynosiły odpowiednio x_0 i v_0.

7.13. Ciało o masie $m = 10\,\mathrm{g}$ zostało wytrącone w momencie $t = 0$ z położenia równowagi i zaczęło wykonywać drgania harmoniczne o amplitudzie $A_0 = 10\,\mathrm{cm}$ i częstotliwości $f = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$. Obliczyć wartości maksymalne: siły sprężystej, energii kinetycznej oraz energii potencjalnej. Obliczyć wychylenie, prędkość i przyspieszenie tego ciała w 5 i 20 sekundzie ruchu.

7.14. Ciała o masie $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ wykonuje drgania harmoniczne proste opisane równaniem: $x(t) = 0{,}1\cos(50t + \pi/3)$. Jaka jest całkowita energia mechaniczna drgającego ciała?

7.15. Całkowita energia mechaniczna ciała wykonującego drgania harmoniczne o amplitudzie A_0 wynosi E. Ile razy energia kinetyczna tego ciała w punkcie położonym w odległości $x = A_0/2$ od położenia równowagi będzie mniejsza od maksymalnej wartości energii kinetycznej ciała? Ile razy mniejsza będzie energia potencjalna ciała w tym położeniu od jego maksymalnej energii potencjalnej?

7.16. Całkowita energia mechaniczna ciała wykonującego drgania harmoniczne o amplitudzie $A_0 = 5\,\mathrm{cm}$ wynosi $E = 20\,\mathrm{J}$. Jaka będzie energia kinetyczna i potencjalna tego ciała w punkcie odległym o $\sqrt{3}A_0/2$ od położenia równowagi?

7.17. Całkowita energia ciała o masie m drgającego ruchem harmonicznym prostym wynosi E. Napisać równanie ruchu tego ciała, jeżeli siła działająca na ciało w jego skrajnym położeniu wynosi F. W chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w położeniu równowagi.

7.18. Obliczyć amplitudę i częstotliwość drgań harmonicznych punktu materialnego o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$, jeżeli jego całkowita energia mechaniczna $E = 0{,}04\,\mathrm{J}$, a działająca na nie siła przy wychyleniu do połowy amplitudy ma wartość $F = 2\,\mathrm{N}$.

7.19. Ciało o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ wykonuje drganie harmonicznie. Amplituda drgania $A_0 = 0{,}5\,\mathrm{cm}$, a okres $T = 16\,\mathrm{s}$. W jakim położeniu ciała oraz w jakiej chwili jego energia kinetyczna jest równa energii potencjalnej? Ile wynoszą wówczas wartości tych energii?

7.20. W kabinie windy wisi wahadło. Gdy kabina porusza się ze stałym przyspieszeniem skierowanym do Ziemi, to okres drgań wahadła wynosi $T_1 = 1\,\mathrm{s}$, gdy zaś ze stałą prędkością, to okres $T_2 = 0{,}3\,\mathrm{s}$. Obliczyć przyspieszenie kabiny.

7.21. Wahadło matematyczne w miejscowości A wykonuje $n_1 = 500$ wahnięć, a w miejscowości B, w tym samym czasie, wahadło wykonuje $n_2 = 499$ wahnięć. Przyśpieszenie ziemskie w miejscowości B wynosi $g_2 = 9{,}78\,\mathrm{cm/s^2}$. Obliczyć przyśpieszenie ziemskie w miejscowości A.

7.22. Obliczyć okres drgań wahadła matematycznego wiedząc, że wahadło cztery razy krótsze wykonuje w jednej sekundzie o cztery wahnięcia więcej.

7.23. Wahadło zrobione z cienkiego drutu żelaznego i ciężkiej kuli jest w temperaturze $t = 0°\mathrm{C}$ wahadłem sekundowym. O ile zmieni się okres drgań tego wahadła w temperaturze $t_1 = 23°\mathrm{C}$? Współczynnik rozszerzalności liniowej żelaza $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-1}}$.

7.24. Jaka jest długość jednorodnego pręta metalowego, który zawieszony swobodnie na jednym ze swoich końców wykonuje drgania o okresie $T = 0{,}7\,\mathrm{s}$?

7.25. Cienka obręcz o promieniu $r = 25\,\mathrm{cm}$ i masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ zawieszona jest na poziomym, nieważkim pręcie. Wychylając obręcz z położenia równowagi można zapoczątkować jej ruch drgający. Obliczyć okres tych drgań.

7.26. Cienka płytka prostokątna o krawędziach a i b może wahać się wokół osi równoległej do krawędzi a i leżącej w płaszczyźnie płytki. Obliczyć:

a) okres wahań płytki, jeżeli oś obrotu przebiega wzdłuż górnej krawędzi płytki,
b) odległość osi od środka masy płytki, przy której okres drgań jest najmniejszy oraz wartość tego okresu.

7.27. Bryła o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ zawieszona jest na poziomej, nieważkiej osi i wykonuje wraz z nią drgania z okresem $T_1 = 1\,\mathrm{s}$. Na osi tej osadzono sztywno dodatkową tarczę stalową o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ i promieniu $r = 25\,\mathrm{cm}$ tak, że oś przechodzi przez środek tarczy i jest do niej prostopadła. Okres drgań bryły z dodatkową tarczą wzrósł do $T_2 = 2\,\mathrm{s}$. Obliczyć moment bezwładności bryły względem osi.

7.28. Pod wpływem podwieszonej masy $m = 1\,\mathrm{kg}$ sprężyna wagi wydłużyła się o $x = 7\,\mathrm{cm}$. Jaka będzie częstość kołowa drgań sprężyny, jeżeli na szalkę wagi położymy ciężar o masie $m = 4\,\mathrm{kg}$?

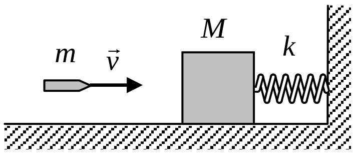
7.29. Sprężyna z podwieszonym ciężarkiem wykonuje drgania z okresem $T = 0{,}8\,\mathrm{s}$. Jaka będzie maksymalna prędkość i przyspieszenie ciężarka, jeżeli zostanie on odciągnięty o $x = 8\,\mathrm{cm}$ w stosunku do położenia równowagi i swobodnie puszczony?

7.30. Szalka wagi sprężynowej obciążona odważnikami wykonuje drgania swobodne z okresem T. O ile powinna wydłużyć się sprężyna wagi pod wpływem dodatkowego obciążenia, aby okres drgań zmienił się o 50%?

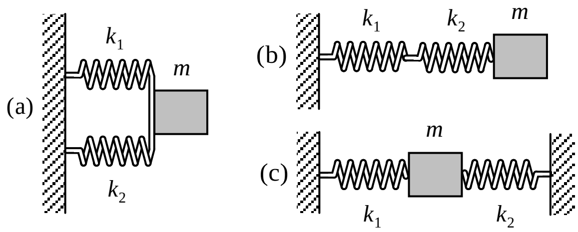
7.31. Ciężarek $Q = 50\,\mathrm{N}$, zawieszony na wadze sprężynowej, wykonuje drgania harmoniczne. Obliczyć okres drgań wiedząc, że kreska podziałki odpowiadająca ciężarowi $P = 100\,\mathrm{N}$ oddalona jest od jej kreski zerowej na odległość $d = 0{,}06\,\mathrm{m}$.

7.32. Gładka tarcza wykonuje w płaszczyźnie poziomej $n = 70$ obr/min. W środku tarczy umocowano jeden koniec sprężynki o długości $l = 8\,\mathrm{cm}$, a na drugim końcu sprężynki umocowano gładką kulkę o masie $m = 100\,\mathrm{g}$. Pod wpływem siły $P = 0{,}196\,\mathrm{N}$ sprężynka rozciąga się o $x_1 = 1\,\mathrm{cm}$. O ile rozciągnie się ta sprężynka wskutek wirowego ruchu tarczy?

7.33. Blok o masie $M = 10\,\mathrm{kg}$ połączony jest ze ścianą sprężyną o stałej sprężystości $k = 0{,}5\,\mathrm{kN/m}$. W blok uderza pocisk o masie $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ z prędkością $v = 100\,\mathrm{m/s}$ i po zderzeniu grzęźnie w nim. Obliczyć prędkość bloku tuż po zderzeniu oraz częstość i amplitudę drgań harmonicznych bloku. Tarcie bloku o podłoże pominąć.



7.34. Dwie sprężyny o stałych sprężystości $k_1 = 100\,\mathrm{N/m}$ i $k_2 = 200\,\mathrm{N/m}$ połączone są z blokiem o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny, która mogłaby zastąpić układ tych dwóch sprężyn, jeżeli są one połączone tak, jak na rysunku (a), (b) i (c)?



7.35. Obliczyć częstość drgań układów z poprzedniego zadania, gdy obydwie sprężyny mają taką samą stałą sprężystości $k = 100\,\mathrm{N/m}$, a ciężarek ma masę $m = 1\,\mathrm{kg}$.

7.36. Ciało o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ znajduje się na końcu sprężyny. W chwili $t = 0$ rozciągnięto sprężynę o $x_0 = 5\,\mathrm{cm}$ i puszczono. Gdy wydłużenie sprężyny wynosi $x = 3\,\mathrm{cm}$, działa na nią siła $F = 7{,}5\,\mathrm{N}$.

a) Ile wynosi stała sprężystości k sprężyny?
b) Obliczyć częstość, częstotliwość i okres drgań.
c) Ile wynosi maksymalne wychylenie, prędkość i przyspieszenie ciała? Jaka jest maksymalna wartość działającej siły?
d) Obliczyć całkowitą energię układu.
e) Obliczyć wychylenie, prędkość, przyspieszenie, działającą siłę oraz energię potencjalną, kinetyczną i całkowitą w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = T$ co $\Delta t = T/8$.

7.37. Na układ z poprzedniego zadania działa dodatkowo siła tarcia. Ile wynosi stała tłumienia, częstość drgań i jego okres, jeżeli amplituda spadła do $A = 1\,\mathrm{cm}$ po upływie czasu: (a) $\Delta t_1 = 0{,}1\,\mathrm{s}$, (b) $\Delta t_2 = 0{,}2\,\mathrm{s}$, (c) $\Delta t_3 = 0{,}3\,\mathrm{s}$, (d) $\Delta t_4 = 0{,}5\,\mathrm{s}$, (e) $\Delta t_5 = 1\,\mathrm{s}$, (f) $\Delta t_6 = 2\,\mathrm{s}$. Jak zmienia się częstość drgań i okres drgań tłumionych w stosunku do drgań swobodnych?

7.38. Przez Ziemię o promieniu R_Z wykopany został tunel przebiegający przez jej środek. Pokazać, że siła działająca na cząstkę umieszczoną w tym tunelu jest siłą harmoniczną. Obliczyć:

a) siłę działającą na kulę o masie $m = 100\,\mathrm{kg}$, znajdująca się w odległości $r_1 = R_Z$ i $r_2 = R_Z / 2$ od środka Ziemi,
b) częstość i okres drgań kuli w tunelu,
c) całkowitą energię poruszającej się kuli,
d) miejsce, w którym wartość energii kinetycznej jest równa wartości energii potencjalnej kuli.

W momencie $t = 0$ kula rozpoczęła swobodny spadek z położenia $r_1 = R_Z$.

7.39. Areometr o masie $m = 200\,\mathrm{g}$ i średnicy $d = 1\,\mathrm{cm}$ pływa w cieczy o nieznanej gęstości. Gdy areometr zostanie zanurzony w cieczy i puszczony, zaczyna wykonywać drgania harmoniczne o okresie $T = 3{,}5\,\mathrm{s}$. Obliczyć gęstość cieczy. W obliczeniach pominąć tarcie związane z lepkością cieczy.

7.40. W rurce wygiętej w kształcie litery "U" i polu przekroju S, znajduje się pewna objętość cieczy V. W wyniku zakłócenia warunku równowagi, poziom cieczy w jednym ramieniu rurki podniósł się, a w drugim obniżył i słup cieczy zaczął wykonywać ruch drgający. Dowieść, że drgania te są harmoniczne i obliczyć okres drgań słupa cieczy. Tarcie związane z lepkością cieczy pominąć.

7.41. Ciało leży na poziomej platformie, która wykonuje poziome drgania harmoniczne proste o częstotliwości $f = 5\,\mathrm{Hz}$ i amplitudzie $A_0 = 2\,\mathrm{cm}$. Jaki powinien być najmniejszy współczynnik tarcia statycznego między ciałem, a powierzchnią platformy, aby ciało nie ślizgało się po jej powierzchni?

7.42. Pozioma platforma wykonuje na kierunku pionowym do swojej powierzchni drgania harmoniczne proste o amplitudzie $A_0 = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Jaka może być maksymalna częstość drgań platformy, aby leżące na niej ciało od niej się nie odrywało?

7.43. Dwa drgania harmoniczne, odbywające się wzdłuż tej samej prostej, dają wypadkowe drganie o równaniu: $y = 5\sin(\omega t + \pi/6)\,\mathrm{cm}$. Wiedząc, że faza początkowa pierwszego z drgań składowych jest równa zeru $(\varphi_{01} = 0)$, zapisać równania drgań składowych.

7.44. Punkt bierze udział w dwóch drganiach równoległych o jednakowych częstościach kołowych ω, lecz różnych amplitudach i różnych fazach początkowych. Drgania te opisane są równaniami: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Obliczyć amplitudę i fazę początkową drgania wypadkowego, jeżeli wiadomo, że drganie wypadkowe jest także drganiem harmonicznym prostym o częstości kołowej równej częstościom kołowym drgań składowych.

7.45. Ciało o masie $m = 250\,\mathrm{g}$ wykonuje drganie harmoniczne tłumione. Współczynnik sprężystości $k = 25\,\mathrm{N/m}$, a parametr $b = 1\,\mathrm{kg/s}$. Obliczyć:

a) okres drgań tłumionych. Porównać ten okres drgań z okresem drgań nietłumionych oscylatora,
b) czas, w jakim amplituda zmaleje do połowy wartości początkowej,
c) czas, w którym energia całkowita zmaleje do połowy wartości początkowej.

7.46. Ciało wykonuje ruch drgający tłumiony. Obliczyć ile razy zmniejszy się amplituda tego drgania po $n = 10$ pełnych wahnięciach, jeżeli logarytmiczny dekrement tłumienia $\Lambda = 0{,}05$?

7.47. Doświadczalnie określono okres drgań tłumionych $T = 2{,}5\,\mathrm{s}$ oraz dekrement logarytmiczny tłumienia $\Lambda = 0{,}15$. Wyprowadzić równanie opisujące wychylenie układu z położenia równowagi w funkcji czasu. W momencie $t = 0$ wychylenie ciała z położenia równowagi wynosiło $x_0 = 5\,\mathrm{cm}$, a jego prędkość była równa zeru.

7.48. Ile razy zmniejszy się energia całkowita drgań tłumionych wahadła matematycznego o długości $l = 70\,\mathrm{cm}$ po upływie czasu $t = 5\,\mathrm{min}$, jeżeli logarytmiczny dekrement tłumienia wynosi $\Lambda = 0{,}031$?

7.49. Okres drgań nietłumionych wahadła wynosi $T_0 = 1\,\mathrm{s}$. W środowisku tłumiącym amplituda drgań wahadła w czasie jednego okresu zmniejszyła się o 10%. O ile zmniejszy się okres drgań tłumionych wahadła?

7.50. Amplituda drgań tłumionych wahadła zmalała w ciągu czasu $t_1 = 1\,\mathrm{min}$ o połowę. Ile razy amplituda ta zmaleje w czasie $t_2 = 3\,\mathrm{min}$?

7.51. Równanie fali określa zależność: $x = 10\sin[2\pi(100t - 0.01z)]$, gdzie x i z wyrażone są w centymetrach, a czas t w sekundach. Jaka jest amplituda, częstość kołowa, częstotliwość, okres, prędkość fazowa i faza początkowa fali?

7.52. Fala ultradźwiękowa, przechodząc ze stali do miedzi, zmienia swoja długość. Obliczyć względną zmianę długości fali, jeżeli fala jest falą podłużną o częstotliwości $f = 1\,\mathrm{MHz}$. Moduły Younga i gęstości dla stali i miedzi wynoszą odpowiednio: $Y_s = 220\,\mathrm{GPa}$, $\rho_s = 7{,}8\,\mathrm{gcm^{-3}}$, $Y_m = 130\,\mathrm{GPa}$, $\rho_m = 9\,\mathrm{gcm^{-3}}$.

7.53. Dwa punkty środowiska drgają w fazach różniących się o 2π. Udowodnić, że odległość między tymi punktami równa jest długości fali.

7.54. W pewnym środowisku rozchodzi się fala podłużna o amplitudzie $A = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ i długości $\lambda = 8\,\mathrm{mm}$. Prędkość fali $v = 1200\,\mathrm{m/s}$. Jaka jest maksymalna prędkość drgających cząsteczek środowiska?

7.55. W ośrodku rozchodzi się z prędkością $v = 25\,\mathrm{m/s}$ fala harmoniczna płaska o częstotliwości $f = 30\,\mathrm{Hz}$. Po upływie czasu $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ od rozpoczęcia drgań w źródle, w odległości $z_1 = 50\,\mathrm{m}$ od tego źródła, wychylenie cząsteczki ośrodka było równe $x_1 = 1\,\mathrm{cm}$. Jakie było w tym czasie wychylenie cząsteczki ośrodka znajdującej się w odległości $z_2 = 55\,\mathrm{m}$ od źródła fali?

7.56. Obliczyć częstotliwość fali mechanicznej w ośrodku sprężystym, jeżeli różnica faz drgań dwóch cząsteczek ośrodka odległych od siebie o $d = 10\,\mathrm{cm}$ wynosi $\Delta\varphi = \pi/3$, a prędkość fazowa fali $v = 15\,\mathrm{m/s}$.

7.57. Dwie fale harmoniczne płaskie o tej samej częstości ω poruszają się w jednym kierunku. Amplitudy obydwu fal wynoszą A_1 i A_2, a ich fazy początkowe $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$. Napisać równanie fali wypadkowej wiedząc, że fala wypadkowa jest także falą harmoniczną płaską o częstości kołowej równej częstościom kołowym fal składowych.

7.58. Dwa źródła emitują fale o tych samych amplitudach, tych samych długościach $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ i tych samych fazach początkowych. W pewnym punkcie, odległym o $d_1 = 10\,\mathrm{m}$ od pierwszego źródła, cząsteczki środowiska drgają z niezmienną amplitudą, równą amplitudom każdego z ciągów fal. Co można powiedzieć o odległości d_2 tego punktu od drugiego źródła fal?

7.59. Biegnące naprzeciwko siebie fale o prędkościach $v = 400\,\mathrm{m/s}$ i częstotliwościach $f = 200\,\mathrm{Hz}$ utworzyły falę stojącą. Jaka jest odległość między sąsiednimi węzłami powstałej fali?

7.60. Na napiętej strunie wytworzyła się fala stojąca. Odległość od punku P, w którym amplituda drgań wynosi $A = 1\,\mathrm{cm}$, od sąsiednich punktów o takiej samej amplitudzie wynosi: $l_1 = 2\,\mathrm{cm}$ - w lewą stronę, i $l_2 = 5\,\mathrm{cm}$ - w prawą stronę. Jaka jest długość tej fali stojącej oraz jej amplituda w strzałce?

7.61. Falę stojącą opisuje równanie: $x(z,t) = 0{,}04\cos(5\pi z)\cos(40\pi t)$, gdzie wielkości x, z i t wyrażone są odpowiednio w metrach i sekundach.

a) Określić położenie wszystkich strzałek w obszarze $0 \le z \le 1{,}2\,\mathrm{m}$.
b) Z jaką częstotliwością drga każdy punkt środowiska?
c) Napisać równania fal składowych, które nakładając się utworzyły omawianą falę stojącą.

7.62. Fala dźwiękowa wpadając do półotwartej rury o długości $l = 90\,\mathrm{cm}$ nakłada się na falę odbitą od jej zamkniętego końca, co prowadzi do powstania fali stojącej. Jaka jest częstotliwość fali, jeżeli w wyniku interferencji, w obrębie rury, powstała fala stojąca o $n = 5$ strzałkach i takiej samej liczbie węzłów? Jaka jest relacja między odległością dzielącą sąsiadujące strzałki fali stojącej, a długością fali? Napisać równanie powstałej fali stojącej pamiętając, że fala odbijając się od denka rury zmienia w stosunku do fali padającej swoją fazę o π? Prędkość dźwięku w powietrzu $v = 330\,\mathrm{m/s}$.

7.63. Przy pomocy półotwartej rury o długości $l = 90\,\mathrm{cm}$ można wygenerować dźwięk o częstotliwości $f = 275\,\mathrm{Hz}$. Jaka liczba węzłów i jaka liczba strzałek powstaje w rurze przy wytwarzaniu dźwięku o takiej częstotliwości? Prędkość dźwięku w powietrzu $v = 330\,\mathrm{m/s}$.