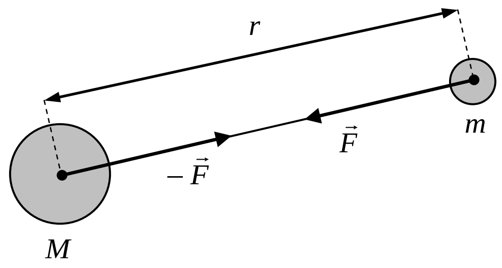
6. Pole grawitacyjne

Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia głosi, że dwie masy punktowe M i m przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu tych mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości pomiędzy nimi, przy czym kierunek działania sił pokrywa się z kierunkiem prostej przechodzącej przez obydwa punkty. W ujęciu wektorowym i skalarnym prawo to ma postać:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{6.1}$$

gdzie $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$ jest *stałą grawitacji*. Powyższy zapis jest także prawdziwy dla mas kulistych. Równanie (6.1) obowiązuje również dla mas o nieregularnych kształtach pod warunkiem, że wymiary takich ciał są nieporównywalnie mniejsze od dzielącej ich odległości r, utożsamianej w przypadku obiektów o skończonych gabarytach z odległością między środkami mas tych ciał.



Rys. 6.1. Ilustracja do *prawa powszechnego ciążenia*

Natężenie pola grawitacyjnego

Jest to siłowy parametr charakteryzujący pole grawitacyjne towarzyszące masie M, zdefiniowany jako siła oddziaływania tego pola na umieszczoną w nim jednostkową masę próbną:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{6.2}$$

Linie sił pola grawitacyjnego, to z definicji krzywe, do których wektor $\vec{\gamma}$ jest styczny w każdym ich punkcie.

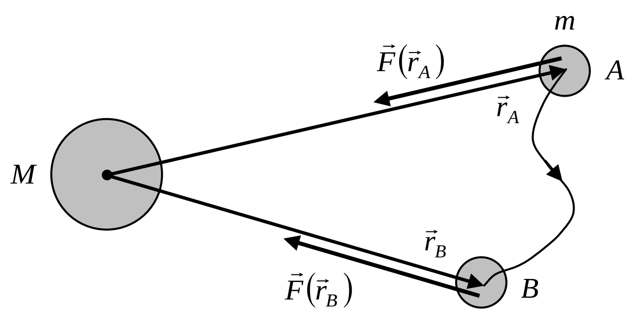
Ciężar ciała i przyspieszenie ziemskie

Ciężarem ciała o masie m nazywamy siłę, z jaką Ziemia lub inne ciało niebieskie przyciąga tą masę na swojej powierzchni. Siła ta określona jest przez *prawo powszechnego ciążenia* (6.1) i w przypadku Ziemi wynosi:

$$F = F(r = R_Z) = G\frac{M_Z m}{R_Z^2} = mg, \qquad g = G\frac{M_Z}{R_Z^2}, \tag{6.3}$$

gdzie M_Z jest masą Ziemi, R_Z - jej promieniem, a $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ - przyspieszeniem ziemskim.

Praca sił pola grawitacyjnego



Rys. 6.2. Praca pola grawitacyjnego nie zależy od drogi przemieszczanego ciała

Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym. Praca sił pola grawitacyjnego towarzyszącego masie M i przemieszczającego masę próbną m między dwoma punktami A i B tego pola nie zależy od kształtu drogi i wyraża się wzorem:

$$L_{A \to B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right), \tag{6.4}$$

gdzie r_A i r_B oznaczają odległości punktów A i B od źródła pola. Powyższy wzór obowiązuje w przypadku pola o symetrii sferycznej. Dla jednorodnego pola grawitacyjnego, przy powierzchni Ziemi, praca ta zależy tylko od różnicy wysokości przemieszczanego przez to pole ciała:

$$L_{A \to B} = -mg(h_B - h_A). \tag{6.5}$$

Energia potencjalna pola grawitacyjnego

Praca sił pola grawitacyjnego jest określona jednoznacznie, natomiast energia potencjalna pola określona jest z dokładnością do stałej. W przypadku pola grawitacyjnego o symetrii sferycznej przyjmujemy zwykle, że energia potencjalna znika w nieskończoności. Przy takim założeniu energia potencjalna pola grawitacyjnego zależy tylko od odległości r od źródła pola i wynosi:

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r}. \tag{6.6}$$

Porównując wyrażenia (6.4) i (6.6) widzimy, że energia potencjalna jest pracą, którą wykonuje pole grawitacyjne przemieszczając (po dowolnej drodze) masę m od punktu wyznaczonego przez odległość r do nieskończoności.

Dla jednorodnego pola grawitacyjnego, przy powierzchni Ziemi:

$$V = mgh, \tag{6.7}$$

gdzie h jest wysokością nad pewnym określonym poziomem, dla którego przyjęto $V = 0$.

Zasada zachowania energii w polu grawitacyjnym

Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, więc całkowita energia mechaniczna ciała o masie m umieszczonego w dowolnym punkcie tego pola odległego o r od jego źródła jest stała:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \mathrm{const}. \qquad (6.8)$$

Dla jednorodnego pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi zasada ta ma postać:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \mathrm{const}. \qquad (6.9)$$

Prędkości kosmiczne

Pierwsza prędkość kosmiczna. Jest to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać ciału względem przyciągającego je ciała niebieskiego, aby ciało to poruszało się po zamkniętej orbicie i stało się satelitą ciała niebieskiego. Dla planety o kształcie kuli, orbita ta jest orbitą kołową o promieniu równym promieniowi planety. Dla Ziemi, pierwsza prędkość kosmiczna wyraża się wzorem:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_z}} = \sqrt{gR_Z} = 7{,}91\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \qquad (6.10)$$

Druga prędkość kosmiczna. Jest to tzw. prędkość ucieczki, tj. minimalna prędkość, jaką należy nadać ciału, aby opuściło ono na zawsze pole grawitacyjne ciała niebieskiego, czyli oddaliło się od tego ciała do nieskończoności. Dla Ziemi, druga prędkość kosmiczna wynosi:

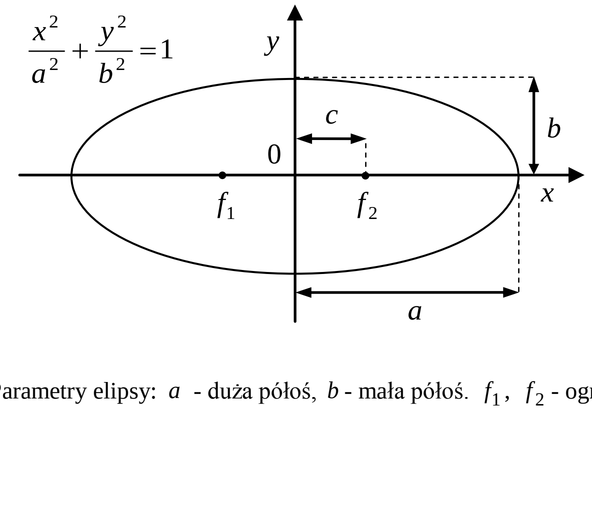
$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_z}} = \sqrt{2gR_Z} = 11{,}2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \qquad (6.11)$$

Trzecia prędkość kosmiczna. Jest to prędkość potrzebna do opuszczenia Układu Słonecznego ($v_3 = 16{,}7$ km/s).

Czwarta prędkość kosmiczna. Jest to prędkość, jaką należy nadać ciału, aby opuściło Galaktykę ($v_4 = 130$km/s).

Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie, przy czym w jednym z jej ognisk znajduje się Słońce.



Rys. 6.3. Parametry elipsy: a - duża półoś, b - mała półoś. f_1, f_2 - ogniska elipsy.

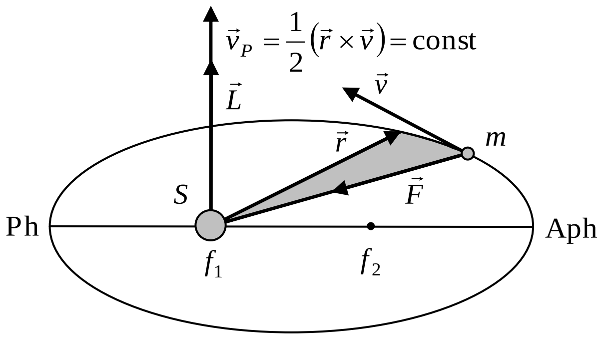
W matematyce elipsę opisujemy podając jej dużą i małą półoś (Rys 6.3.). Spłaszczenie elipsy określa mimośród $e = c/a$. Parametr ten jest względnie duży dla Merkurego ($e = 0{,}21$) i Plutona ($e = 0{,}25$) natomiast dla pozostałych planet nie przekracza wartości $e = 0{,}1$ (dla Ziemi $e = 0{,}02$).

Drugie prawo Keplera

Prawo to jest konsekwencją zasady zachowania momentu pędu i głosi, że prędkość polowa planety $\vec{v}_P$, tj. powierzchnia zakreślana w jednostce czasu przez jej promień wodzący $\vec{r}$ (poprowadzony od Słońca) jest stała:

$$\vec{v}_P = \frac{\vec{L}}{2m} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const}, \tag{6.12}$$

gdzie $\vec{L}$ jest momentem pędu planety o masie m i prędkości liniowej $\vec{v}$. Z prawa tego wynika, że w *perihelium* prędkość liniowa planety jest największa, a w *aphelium.* – najmniejsza.



Rys. 6.4. Ilustracja drugiego prawa Keplera

Trzecie prawo Keplera

Stosunek sześcianu dużej półosi orbity do kwadratu okresu obiegu planety dookoła Słońca jest stały dla wszystkich planet Układu Słonecznego:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}. \tag{6.13}$$

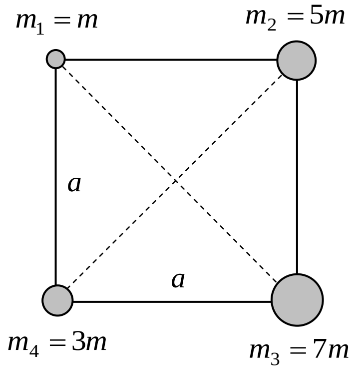
Okres obiegu dookoła Słońca jest więc dłuższy dla planet bardziej od Słońca odległych.

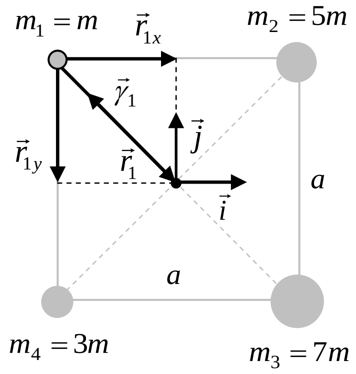
Przykłady

Przykład 6.1. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ w środku kwadratu o boku a, w którego wierzchołkach ulokowane są kule o masach $m_1 = m$, $m_2 = 5m$, $m_3 = 7m$, $m_4 = 3m$. Promienie kul są niewielkie w porównaniu z ich wzajemnymi odległościami. Stała grawitacji wynosi G.

Rozwiązanie:

Natężenie pola grawitacyjnego w środku kwadratu jest równe sumie natężeń pól pochodzących od poszczególnych mas ulokowanych w rogach kwadratu.





Wykorzystując definicję (6.2) otrzymamy:

$$\vec{\gamma} = \sum_{i=1}^{4} \vec{\gamma}_i = -\sum_{i=1}^{4} G \frac{m_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} = -\frac{G}{r^3} \sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i \ ,$$

gdzie $\vec{r}_i$ jest wektorem łączącym masę m_i ze środkiem kwadratu, natomiast $r_i = r = a/\sqrt{2}$ jest długością każdego z wektorów $\vec{r}_i$. Dla poszczególnych mas wektory $\vec{r}_i$ mają postać:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \end{bmatrix} = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_2 = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_4 = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poszukiwane natężenie pola grawitacyjnego wynosi

$$\vec{\gamma} = -\frac{\sqrt{2}G}{a^2}\left(m\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} + 5m\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} + 7m\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} + 3m\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\vec{\gamma} = 4\sqrt{2}G\frac{m}{a^2}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right).$$

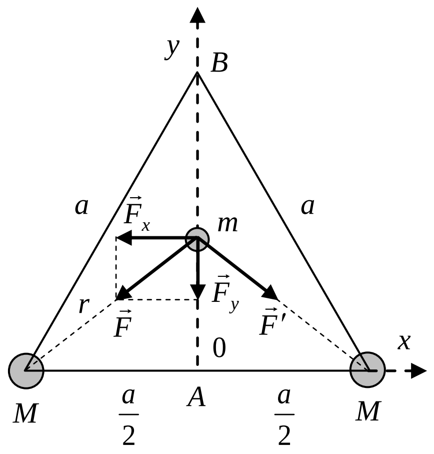
Przykład 6.2. W połowie odległości między kulistymi ciałami o masach M znajduje się masa m. Korzystając z definicji pracy mechanicznej obliczyć pracę, jaką należy wykonać, aby ruchen jednostajnym przenieść ciało o masie m do punktu, który z położeniami mas M tworzy trójkąt równoboczny. Obliczoną pracę porównać z ogólną regułą (6.4) na pracę sił pola grawitacyjnego o symetrii sferycznej.

Rozwiązanie:

Dla prostoty, obliczmy pracę, jaką należy wykonać, aby przenieść ciało wzdłuż wysokości trójkąta równobocznego od położenia początkowego $A(x=0, y=0)$ do położenia $B\left(x=0, y=a\sqrt{3/2}\right)$ (rysunek). Na drodze tej, każda z mas M przyciąga przemieszczane ciało o masie m z siłą o tej samej wartości

$$F = F' = G\frac{Mm}{r^2}, \qquad r = \left(y^2 + (a/2)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie r jest odległością masy m od każdej z mas M. Praca wykonywana jest tylko przeciwko składowym F_y i F_y' sił $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ (składowe F_x i F_x' równoważą się), a przyczynek do pracy przeciwko siłom pola wytworzonego przez każdą z mas M jest na określonej drodze taki sam.



Całkowita praca będzie zatem równa:

$$L_{A\to B} = -2\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{s} = 2\int_0^{a\sqrt{3}/2} F_y dy, \qquad \left(\vec{F}\cdot d\vec{s} = F_y dy\cos\pi = -F_y dy\right).$$

Znak *minus* w powyższym równaniu wynika z założenia, że praca wykonywana jest przeciwko siłom pola grawitacyjnego. Z proporcji $y/r = F_y/F$ znajdziemy składową F_y:

$$F_y = F\frac{y}{r} = GMm\frac{y}{r^3} = GMmy\left(y^2 + (a/2)^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

i w konsekwencji poszukiwaną pracę

$$L_{A\to B} = 2GMm\int_0^{a\sqrt{3}/2} y\left(y^2 + (a/2)^2\right)^{\frac{-3}{2}} dy = -2GMm\left(y^2 + (a/2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{a\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2GMm}{a}.$$

Podstawiając $r_A = a/2$ oraz $r_B = a$ do ogólnego wzoru (6.4) na pracę, którą wykonują po dowolnej drodze siły pola grawitacyjnego o symetrii sferycznej znajdziemy:

$$L'_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = GMm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a/2}\right) = -\frac{GMm}{a}.$$

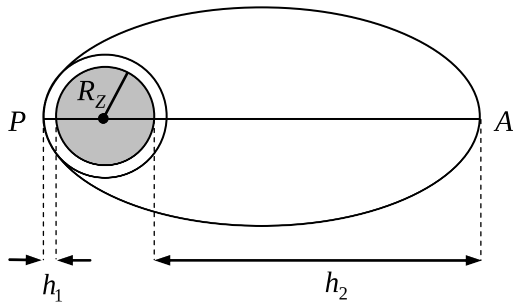
Przy uwzględnieniu podwójnej masy M, otrzymujemy: $L_{A\to B} = -L'_{A\to B}$. Różnica w znakach obydwu prac wynika z przyjętego założenia, że praca $L_{A\to B}$ liczona jet przeciwko siłom pola grawitacyjnego, natomiast równanie (6.4) wyraża pracę $L'_{A\to B}$ wykonaną przez to pole. Otrzymany rezultat nie powinien dziwić, ponieważ rozważane pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, a praca wykonana w ruchu jednostajnym przeciwko siłom takiego pola, czy też praca wykonana przez takie pole zależy tylko od położenia wyjściowego i końcowego przemieszczanej masy, natomiast nie zależy od kształtu drogi, po której masa ta jest przemieszczana.

Przykład 6.3. Satelita o masie $m = 1000\,\mathrm{kg}$ okrążał Ziemię po orbicie kołowej w odległości $h_1 = 900\,\mathrm{km}$ od powierzchni Ziemi. Satelita ten został przeniesiony na orbitę eliptyczną, na której jego odległość od powierzchni Ziemi w perigeum pozostała taka sama, a w apogeum wzrosła do $h_2 = 18000\,\mathrm{km}$. Obliczyć:

a) okres obiegu T_1 oraz prędkość v_1 satelity krążącego wokół Ziemi po pierwotnej orbicie kołowej,
b) okres obiegu T_2 oraz prędkości satelity w perigeum v_p i apogeum v_a po przeniesieniu na orbitę eliptyczną,
c) ilość energii niezbędnej do przeniesienia satelity z orbity kołowej na orbitę eliptyczną.

Promień Ziemi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$.

Rozwiązanie:



a) Na satelitę poruszającego się wokół Ziemi działa tylko siła grawitacyjnego przyciągania, która jest siłą dośrodkową:

$$F_G = F_{DS}\,, \qquad G\frac{M_Z m}{(R_Z + h_1)^2} = \frac{m v_1^2}{R_Z + h_1}\,.$$

W równaniu tym występuje nie podana wartość stałej grawitacji G oraz masy Ziemi M_Z. Iloczyn obydwu tych wielkości znajdziemy wychodząc z definicji przyspieszenia ziemskiego g, tj. przyspieszenia, jakiego doznaje każde ciało przy powierzchni Ziemi:

$$G\frac{M_Z m}{R_Z^2} = mg\,, \qquad GM_Z = gR_Z^2\,.$$

Uwzględniając powyższe relację otrzymamy:

$$v_1 = R_Z\left(\frac{g}{R_Z + h_1}\right)^{1/2}, \qquad T_1 = \frac{2\pi(R_Z + h_1)}{v_1} = \frac{2\pi(R_Z + h_1)^{3/2}}{R_Z g^{1/2}}\,.$$

Po podstawieniu danych liczbowych znajdziemy: $v_1 = 7400\,\mathrm{m/s}$, $T_1 = 6170\,\mathrm{s}$.

b) Okres obiegu satelity po orbicie eliptycznej obliczymy z *trzeciego prawa Keplera* odniesionego do ruchu satelity po orbitach okołoziemskich. Dla rozważanej orbity kołowej i eliptycznej prawo to przyjmie postać:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{(R_Z+h_1)^3}{[(2R_Z+h_1+h_2)/2]^3}=\frac{T_1^2}{T_2^2},$$

gdzie a_1 i a_2 są dużymi półosiami odpowiednio pierwotnej orbity kołowej, równej promieniowi tej orbity, oraz orbity eliptycznej. Uwzględniając obliczony w punkcie a) okres T_1 otrzymamy:

$$T_2=\frac{\pi}{R_Z}\frac{(2R_Z+h_1+h_2)^{3/2}}{(2g)^{1/2}}.$$

Związek między prędkością satelity w perigeum i apogeum otrzymamy z *drugiego prawa Keplera*. W obydwu punktach orbity eliptycznej wektor wodzący satelity (o początku w środku masy Ziemi) jest prostopadły do wektora prędkości i skalarny zapis równania (6,12) przyjmuje postać:

$$(R_Z+h_1)v_p=(R_Z+h_2)v_a.$$

Jest to równanie o dwóch niewiadomych. Brakujące równanie otrzymamy z zasady zachowania energii. Ruch satelity odbywa się w polu zachowawczym, więc całkowita energia mechaniczna satelity w dowolnym punkcie orbity eliptycznej jest taka sama. Porównując całkowitą energię (6.8) w perigeum i apogeum orbity eliptycznej otrzymamy:

$$\frac{1}{2}mv_p^2-G\frac{M_Zm}{R_Z+h_1}=\frac{1}{2}mv_a^2-G\frac{M_Zm}{R_Z+h_2},\qquad GM_Z=gR_Z^2.$$

Rozwiązując otrzymany układ równań znajdziemy:

$$v_p=R_Z\left[\frac{2g(R_Z+h_2)}{(2R_Z+h_1+h_2)(R_Z+h_1)}\right]^{1/2},$$

$$v_a=R_Z\left[\frac{2g(R_Z+h_1)}{(2R_Z+h_1+h_2)(R_Z+h_2)}\right]^{1/2}.$$

Uwzględniając dane liczbowe otrzymamy: $\mathrm{T}_2=19806\,\mathrm{s}$, $v_p=9184\,\mathrm{m/s}$, $v_a=2740\mathrm{m/s}$.

c) Całkowita energia mechaniczna satelity na orbicie kołowej wynosi:

$$E_1=\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{M_Zm}{R_Z+h_1}=-\frac{1}{2}mg\frac{R_Z^2}{R_Z+h_1}.$$

Całkowitą energia na orbicie eliptycznej jest równa całkowitej energii mechanicznej w dowolnym punkcie orbity. Przyjmując, że punktem tym jest perigeum znajdziemy:

$$E_2=\frac{1}{2}mv_p^2-G\frac{M_Zm}{R_Z+h_1}=-mg\frac{R_Z^2}{2R_Z+h_1+h_2}.$$

Ilość energii niezbędnej do przeniesienia satelity z orbity kołowej na orbitę eliptyczną

$$\Delta E = E_2 - E_1 = mg\frac{R_Z^2\left(h_2 - h_1\right)}{2\left(2R_Z + h_1 + h_2\right)\left(R_Z + h_1\right)} .$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy $\Delta E = 14{,}8\ \mathrm{GJ}$.

Zadania

6.1. Odważnik o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ przyciągany jest przez Ziemię i w pobliżu jej powierzchni spada z przyspieszeniem $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Czy Ziemia spada na odważnik? Jeżeli tak, to z jakim przyspieszeniem odbywa się ten spadek? Masa Ziemi $M_Z = 5{,}97\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

6.2. Obliczyć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety o takiej samej gęstości jak Ziemia, lecz dwukrotnie większym promieniu.

6.3. Ile ważyłby człowiek o masie $m = 70\,\mathrm{kg}$ na Plutonie, którego promień i masa odpowiednio wynoszą $R_P = 1123\ \mathrm{km}$, $M_P = 1{,}46\cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}$. Stała grawitacji $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.4. Obliczyć masę Ziemi oraz jej średnią gęstość. Promień Ziemi $R_Z = 6370\ \mathrm{km}$. Stała grawitacji $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.5. Obliczyć średnią gęstość planety o promieniu R, na której doba trwa 4 godziny i na której waga sprężynowa pokazuje na równiku ciężar o 10% mniejszy niż na biegunie.

6.6. Obliczyć siłę grawitacyjnego oddziaływania dwóch stykających się kul ołowianych o promieniu $r = 1\,\mathrm{m}$ każda. Gęstość ołowiu $\rho = 11{,}34\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

6.7. Obliczyc, gdzie znajduje się punkt, w którym przyciąganie ciała przez Ziemię i Księżyc jest jednakowe. Odległość między Ziemią, a Księżycem jest równa w przybliżeniu 60 promieni Ziemi, a masa Ziemi jest około 81 razy większa od masy Księżyca. Czy załoga pojazdu kosmicznego podążająca ruchem swobodnym na Księżyc odczuje moment, w którym ten punkt zostanie osiągnięty?

6.8. Obliczyć przyspieszenie ciała wynikające z prawa powszechnego ciążenia na wysokości $h = 50\,\mathrm{km}$ nad powierzchnią Ziemi. Promień Ziemi $R_Z = 6370\ \mathrm{km}$.

6.9. O ile zmniejszy się ciężar ciała pasażera samolotu lecącego na wysokości $h = 10000\,\mathrm{m}$ w porównaniu z jego ciężarem na poziomie morza? Promień Ziemi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$.

6.10. Czy areometr wycechowany na Ziemi może służyć do pomiaru gęstości cieczy w laboratorium znajdującym się na Księżycu?

6.11. Ile musiałaby trwać doba na Ziemi, aby ciała znajdujące się na równiku były w stanie nieważkości?

6.12. Obliczyć promień planety o takiej samej gęstości i okresie obrotu jak Ziemia, dla której ciała znajdujące się na równiku są w stanie nieważkości.

6.13. Obliczyć masę Słońca, jeśli wiadomo, że prędkość orbitalna Ziemi $V_Z = 29{,}9\ \mathrm{km/s}$, a odległość Ziemi od Słońca $R_{ZS} = 15 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$.

6.14. Znaleźć prędkość ruchu Księżyca wokół Ziemi zakładając, że jego orbita jest kołowa. Masa Ziemi $M_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, odległość między Ziemią, a Księżycem $R_{ZK} = 3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$, stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.15. Wykazać, że stosunek przyspieszenia dośrodkowego Księżyca w ruchu orbitalnym wokół Ziemi do przyspieszenia grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi jest w przybliżeniu równy kwadratowi stosunku promienia Ziemi do odległości pomiędzy Księżycem i Ziemią. Dane: promień Ziemi $R_Z = 6370\ \mathrm{km}$, odległość Ziemia - Księżyc $R_{ZK} = 3{,}84 \cdot 10^5\ \mathrm{km}$, okres obiegu Księżyca wokół Ziemi $T_K = 27{,}3$ doby.

6.16. Czas obiegu Plutona wokół Słońca wynosi 248,5 lat. Jaka jest maksymalna odległość Plutona od Słońca? Długość wielkiej półosi orbity ziemskiej wynosi $1\ \mathrm{AU} = 149{,}6 \cdot 10^9\ \mathrm{m}$.

6.17. Orbita Ziemi wokół Słońca jest bardzo zbliżona do orbity kołowej. Odległości Ziemi od Słońca w aphelium i perihelium wynoszą odpowiednio $R_a = 1{,}52 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$ i $R_p = 1{,}47 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$. Obliczyć mimośród tej orbity. Ile wynoszą względne zmiany promienia orbity, prędkości oraz energii całkowitej, potencjalnej i kinetycznej Ziemi?

6.18. Korzystając z *trzeciego prawa Keplera* obliczyć, ile razy rok na Jowiszu jest dłuższy od roku ziemskiego. Odległość Jowisza od Słońca wynosi $R = 778{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$ i jest $k = 5{,}2$ razy większa niż odległość Ziemi od Słońca.

6.19. Odległość Merkurego od Słońca w aphelium wynosi $R_a = 6{,}97 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$, a w peryhelium $R_p = 4{,}59 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$. Prędkość liniowa ruchu planety w punkcie najbardziej odległym od Słońca wynosi $v = 139900\ \mathrm{km/h}$. Jaka jest prędkość Merkurego, gdy jest najbliżej Słońca?

6.20. Posługując się *drugą zasadą dynamiki*, sformułowaną dla ruchu obrotowego oraz ujętym w postaci wektorowej *prawem powszechnego ciążenia* udowodnić, że moment pędu planety w jej ruchu wokół Słońca pozostaje wielkością stałą.

6.21. Satelita o masie m porusza się po orbicie kołowej na wysokości h nad Ziemią. Jaka jest
a) całkowita energia mechaniczna E_C satelity,
b) energia kinetyczna E_K satelity,
c) prędkość liniowa v satelity,
d) czas obiegu T satelity wokół Ziemi?

6.22. Jaki jest okres obiegu satelity na orbicie oddalonej od powierzchni Ziemi o R_Z, gdzie R_Z jest promieniem Ziemi?

6.23. Jak zmieni się orbita satelity krążącego w odległości $3R_Z$ nad powierzchnią Ziemi, jeżeli jego prędkość wzrośnie dwukrotnie? R_Z jest promieniem Ziemi.

6.24. Ile wynosi stosunek energii potencjalnej E_P do energii kinetycznej E_K satelity krążącego po orbicie kołowej wokół Ziemi?

6.25. Wokół Ziemi, na wysokości równej promieniowi Ziemi oraz wysokości dwukrotnie większej krążą dwa satelity. Ile wynosi stosunek ich prędkości liniowych oraz okresów obiegu wokół Ziemi?

6.26. Dwa satelity o masach m i $2m$ krążą po tej samej orbicie. Prędkość pierwszego satelity wynosi v. Jaka jest prędkość drugiego satelity?

6.27. Pierwszy satelita krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej o promieniu R_1. Drugi satelita krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej o promieniu $R_2 = 3R_1$. Ile wynosi stosunek ich mas, jeżeli ich całkowite energie są sobie równe?

6.28. Określić promień kołowej orbity satelity geostacjonarnego, tj. takiego satelity, którego okres obiegu jest równy jednej dobie. Jaka jest jego całkowita energia mechaniczna na orbicie? Jaka musiała być jego prędkość w momencie startu z Ziemi?

6.29. Z jaką prędkością wyrzucono ciało pionowo do góry, jeżeli osiągnęło ono wysokość $h = 15\,\mathrm{km}$? W obliczeniach uwzględnić sferyczny kształt pola grawitacyjnego. Jaką najmniejszą prędkość początkową powinno mieć ciało, aby nigdy nie powróciło na Ziemię? Masa Ziemi $M_Z = 5{,}96 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.30. Oblicz wartość *pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej* dla Księżyca, wiedząc, że promień Księżyca $R_K = 1740\,\mathrm{km}$, a przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Księżyca jest sześciokrotnie mniejsze od przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni Ziemi. Otrzymane wyniki porównać z odpowiednimi rezultatami dla Ziemi.

6.31. Obliczyć energię kinetyczną ciała o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$, spadającego swobodnie na powierzchnię Ziemi z wysokości $H = 50\,\mathrm{km}$, tuż przy powierzchni Ziemi. Jaką prędkość osiągnęło to ciało? Porównać wyniki liczbowe z przybliżonymi wynikami otrzymanymi przy założeniu, że na rozważanym dystansie pole grawitacyjne jest jednorodne. Promień Ziemi wynosi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$. Opory powietrza pominąć.

6.32. Obliczyć stosunek zmiany energii potencjalnej ciała przeniesionego z powierzchni Ziemi na wysokość h obliczonej przy założeniu, że pole grawitacyjne na rozważanym dystansie jest polem jednorodnym do odpowiedniej zmiany energii potencjalnej obliczonej przy uwzględnieniu symetrii sferycznej pola grawitacyjnego. Dla jakiej wysokości h, obliczone zmiany energii potencjalnej różnią się o 1%? Promień Ziemi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$.

6.33. Zbadać ruch kulki materialnej poruszającej się wzdłuż prostoliniowego kanału przechodzącego przez środek kulistej masy M o promieniu R. W obliczeniach uwzględnić tylko pole grawitacyjne pochodzące od masy M. W momencie $t = 0$ kulka znajdowała się w odległości R od środka kuli, a jej prędkość była równa zeru. Stała grawitacji jest znana i wynosi G.

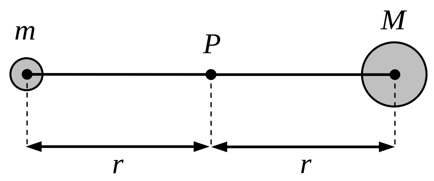
6.34. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi. Jaki promień musiałaby mieć kula ołowiana by wytworzone przez nią pole grawitacyjne miało na jej powierzchni takie samo natężenie, jak natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi? Gęstość ołowiu $\rho = 11{,}34 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

6.35. W jakiej odległości od powierzchni Ziemi natężenie pola grawitacyjnego $\gamma = 1\,\mathrm{m/s^2}$? Masa Ziemi $M_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, promień Ziemi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$, stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.36. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi natężenie pola grawitacyjnego jest czterokrotnie mniejsze niż na jej powierzchni? Ile ważyłby na tej wysokości odważnik o masie 1kg?

6.37. Punktowe masy $m_1 = 10\,\mathrm{t}$ i $m_2 = 40\,\mathrm{t}$ są oddalone od siebie o $d = 5\,\mathrm{m}$. Gdzie znajduje się punkt, w którym natężenie pola grawitacyjnego $\gamma = 0$? Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

6.38. Kula o masie m wytwarza pole grawitacyjne, którego natężenie w punkcie P ma wartość γ. Jakie jest natężenia pola w tym punkcie po umieszczeniu drugiej kuli o masie $M = 2m$?



6.39. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ wytworzonego przez masy $m_1 = m$ i $m_2 = 3m$ w punktach P_1, P_2 i P_3 (rysunek). Promienie kul są niewielkie w porównaniu z ich wzajemnymi odległościami. Stała grawitacji wynosi G.