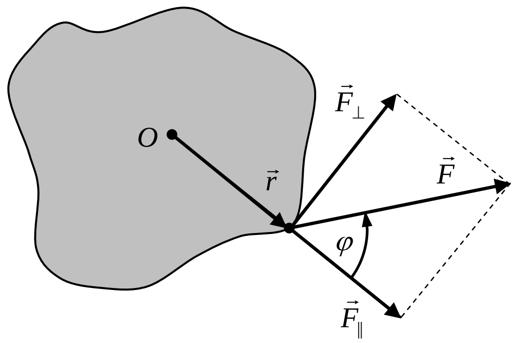
5. Dynamika bryły sztywnej

Moment siły, moment pędu i moment bezwładności

Aby spowodować ruch postępowy, konieczne jest przyłożenie do ciała siły. Aby wprawić bryłę w ruch obrotowy wokół osi lub punktu, niezbędne jest przyłożenie momentu siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,, \qquad M = rF\sin\varphi = rF_{\perp}\,. \tag{5.1}$$

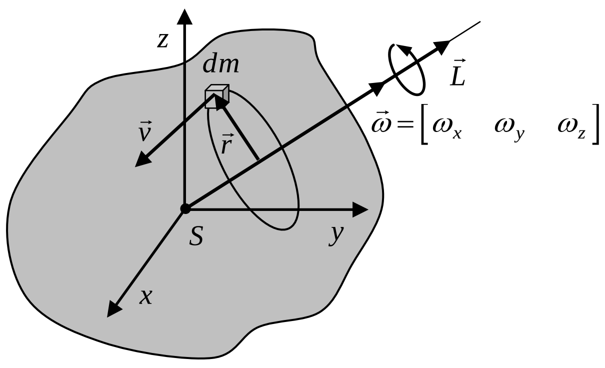
Warunkiem koniecznym wprowadzenia bryły sztywnej w ruch obrotowy jest istnienie w płaszczyźnie obrotu niezerowej składowej $F_{\perp}$ siły $\vec{F}$ (Rys. 5.1.).



Rys. 5.1. Ilustracja do definicji momentu siły. Moment siły jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$

Prędkość ruchu obrotowego scharakteryzowana jest wektorem prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Wektor ten, podobnie jak każdy inny wektor, ma trzy przestrzenne składowe, co oznacza, że dowolny ruch obrotowy można rozłożyć na trzy niezależne obroty wokół osi x, y, z:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}. \tag{5.2}$$



Rys. 5.2. Ilustracja prędkości kątowej i momentu pędu bryły w ruchu obrotowym wokół osi

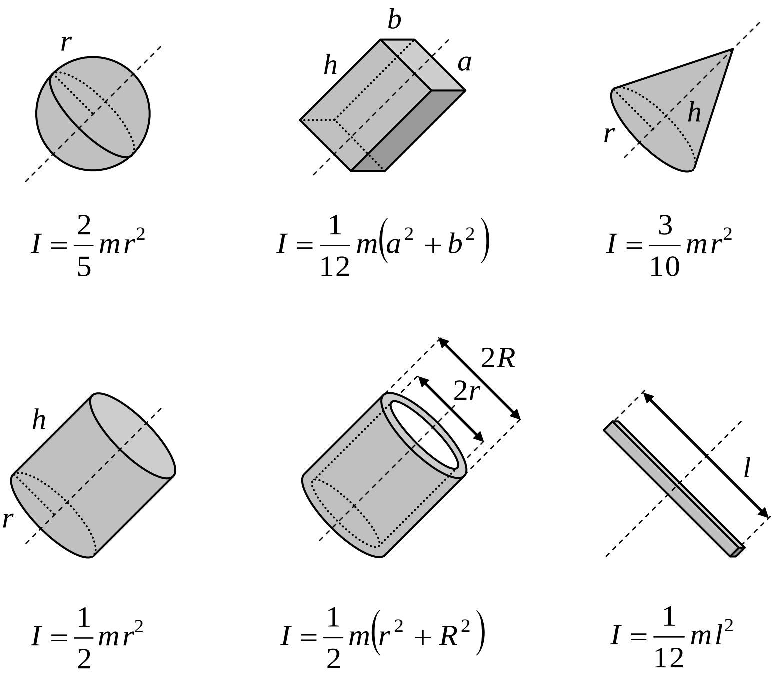
Moment pędu bryły obracającej się wokół osi wynosi:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\,. \tag{5.3}$$

W powyższym wyrażeniu I jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu określonym przez wyrażenie:

$$I = \int_m r^2 \mathrm{d}m\,, \tag{5.4}$$

gdzie m oznacza masę bryły, a $\mathrm{d}m$ jest elementem masy oddalonym od osi obrotu o r. Momenty bezwładności dla niektórych brył podano na Rys. 5.3.



Rys. 5.3. Momenty bezwładności niektórych brył obliczone względem osi przechodzących przez ich środki mas (linie przerywane)

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Dla ruchu obrotowego, *druga zasada dynamiki* przyjmuje postać:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(I\vec{\omega}\right)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{5.5}$$

Jeżeli bryła nie zmienia geometrii, to przyłożenie momentu siły wprawia bryłę w ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony. Jeżeli na bryłę sztywną nie działa żaden moment siły, to bryła się nie obraca lub obraca się ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$, co oznacza między innymi, że podczas obrotu oś obrotu nie zmienia swojej orientacji w przestrzeni. Jeżeli na bryłę nie działa moment siły, a bryła może w trakcie obrotu zmieniać geometrię, to iloczyn $I\vec{\omega} = \mathrm{const}$.

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wokół ustalonej osi wynosi:

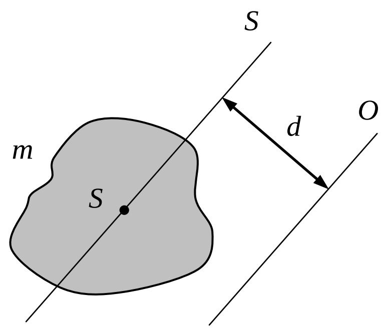
$$T = \frac{1}{2} I\omega^2\,. \tag{5.6}$$

Twierdzenie Steinera

Twierdzenie to pozwala obliczyć moment bezwładności I_O bryły względem określonej osi O, jeżeli znamy moment bezwładności ciała I_S względem osi do niej równoległej i przechodzącej przez środek masy S bryły:

$$I_O = I_S + md^2, \tag{5.7}$$

gdzie d jest odległością między osiami, a m jest masą bryły (Rys.5.4).



Rys. 5.4. Ilustracja do twierdzenia Steinera

Równowaga statyczna układu

Warunki statycznej równowagi układu mechanicznego wynikają z zasad dynamiki. Warunkiem koniecznym równowagi statycznej jest równoważenie się wszystkich sił $\vec{F}_i$ działających na układ - z uwzględnieniem sił zewnętrznych i sił reakcji:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5.8}$$

Jeżeli warunek ten nie będzie spełniony, układ dozna przemieszczenia z pewnym przyspieszeniem. Z równania (5.8) wynika, że równowaga wszystkich sił musi zachodzić na każdym kierunku przestrzennym x, y, z:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \tag{5.9}$$

Warunek (5.8) nie zawsze jednoznacznie wyznacza równowagę statyczną układu. Czasami siły równoważą się, ale tworzą wypadkową parę sił, która mogłaby nadać układowi pewien ruch obrotowy. Warunkiem przeciwdziałającym takiemu ruchowi jest równoważenie się wszystkich momentów sił $\vec{M}_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5.10}$$

Warunek (5.10) równoważny jest trzem zapisom skalarnym:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 . \tag{5.11}$$

W statyce, wybór punktu przestrzeni lub osi, względem której sumujemy momenty sił, nie ma znaczenia. Zwykle punkt lub oś, względem której sumujemy momenty, dobieramy tak, aby uprościć rachunki.

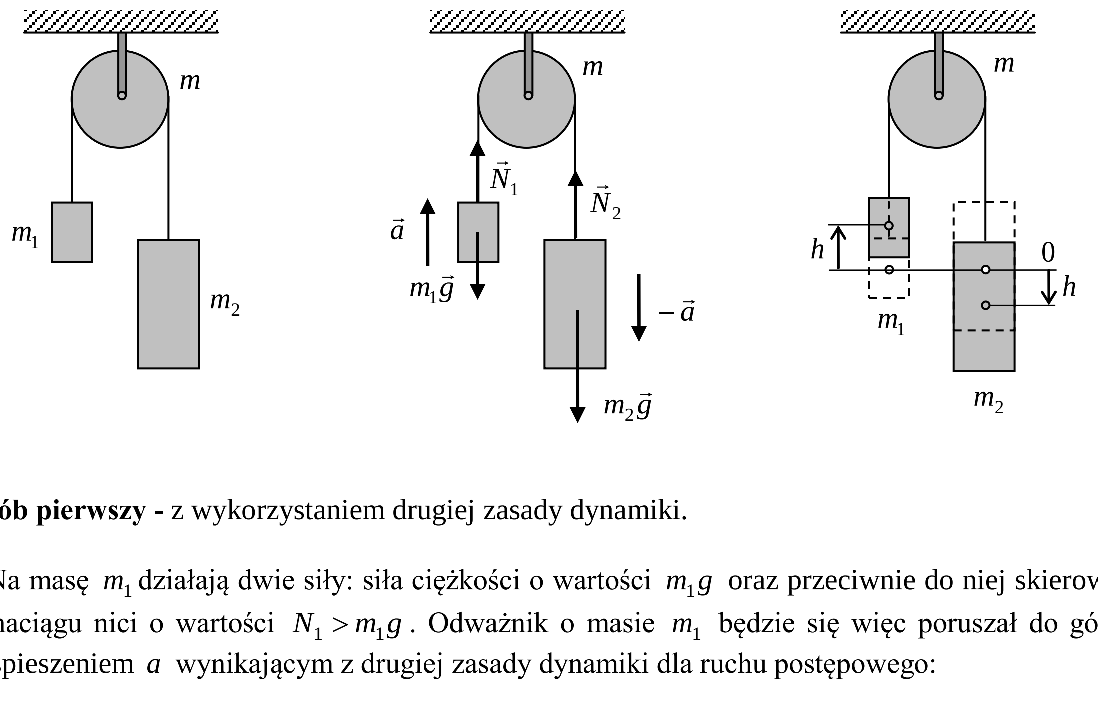
Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by układ był w równowadze statycznej jest więc równoważenie się wszystkich sił oraz wszystkich momentów sił działających na układ. Przykłady 5.2 i 5.3 ilustrują odpowiednio sytuacje, w których wystarczy uwzględnić tylko pierwszy z warunków oraz sytuację, w której wymagane jest uwzględnienie obydwu warunków równowagi jednocześnie.

Przykłady

Przykład 5.1. Przez podwieszony do sufitu bloczek o masie $m = 0{,}2\ \mathrm{kg}$ przerzucono nierozciągliwą nić, na końcach której zawieszono odważniki o masach $m_1 = 2\ \mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\ \mathrm{kg}$. Obliczyć przyspieszenie odważników, naciągi nici z obu stron bloczka oraz naprężenie pomiędzy bloczkiem i sufitem.

Rozwiązanie:

Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami: stosując wprost do poszczególnych elementów układu drugą zasadę dynamiki lub wykorzystując do układu, jako całości, zasadę zachowania energii mechanicznej.



Sposób pierwszy - z wykorzystaniem drugiej zasady dynamiki.

Na masę m_1 działają dwie siły: siła ciężkości o wartości $m_1 g$ oraz przeciwnie do niej skierowana siła naciągu nici o wartości $N_1 > m_1 g$. Odważnik o masie m_1 będzie się więc poruszał do góry z przyspieszeniem a wynikającym z drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego:

$$F_1 = N_1 - m_1 g = m_1 a .$$

Ciężar drugiego odważnika $m_2 g$ jest większy od naciągu N_2 doczepionej do niego nici. Nić jest nierozciągliwa, więc wartość przyspieszenia a, z jakim opada ten odważnik jest taka sama jak dla pierwszego odważnika, a jego ruch opisuje równanie:

$$F_2 = m_2 g - N_2 = m_2 a \, .$$

Bloczek obraca się ruchem obrotowym jednostajnie przyspieszonym pod wpływem wypadkowego, niezerowego momentu siły M wynikającego z istnienia różnych wartości naciągów obydwu końców nici. Ruch bloczka odbywa się zgodnie z drugą zasadą dynamiki, która w odniesieniu do ruchu obrotowego ma postać:

$$M = (N_2 - N_1)R = I\varepsilon \, ,$$

gdzie R jest promieniem bloczka, $I = 0{,}5mR^2$ - jego momentem bezwładności, a ε - przyspieszeniem kątowym, związanym z przyspieszeniem liniowym a za pośrednictwem relacji $\varepsilon = a/R$. Uwzględniając powyższe uwagi zapisujemy ostatnie równanie w postaci:

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} m a .$$

Ruch poszczególnych elementów układu opisany został za pośrednictwem trzech równań z trzema niewiadomymi: a, N_1, N_2. Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \, ,$$

$$N_1 = m_1 (g + a) = m_1 \frac{2m_2 + \frac{1}{2} m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \, ,$$

$$N_2 = m_2 (g - a) = m_2 \frac{2m_1 + \frac{1}{2} m}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \, .$$

Naprężenie zawiesia pomiędzy bloczkiem, a sufitem wyznacza równanie:

$$N = N_1 + N_2 + mg = \frac{4m_1 m_2 + \frac{3}{2}(m_1 + m_2)m + \frac{1}{2} m^2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \, .$$

Podstawiając dane liczbowe znajdziemy: $a = 4{,}15 \, \mathrm{m/s^2}$, $N_1 = 27{,}92 \, \mathrm{N}$, $N_2 = 28{,}30 \, \mathrm{N}$, $N = 58{,}20 \, \mathrm{N}$.

Sposób drugi - z wykorzystaniem zasady zachowania energii mechanicznej.

Przyjmijmy, że układ w momencie $t_0 = 0$ był w stanie spoczynku, gdy środki mas obu ciężarków znajdowały się na tym samym poziomie „zerowym”, któremu z założenia przypisana jest zerowa energia potencjalna. Po upływie pewnego czasu t, lżejszy i cięższy ciężarek przesunął się odpowiednio do góry i w dół na tą samą odległość $h = \frac{1}{2}at^2$ uzyskując tą samą prędkość $v = at$. Całkowita zmiana energii potencjalnej układu w rozważanym przedziale czasu wyniosła

$$\Delta V = m_1 gh - m_2 gh = (m_1 - m_2) g \frac{v^2}{2a} .$$

W tym samym przedziale czasu wzrost energii kinetycznej wyniósł

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 ,$$

gdzie $I = 0{,}5mR^2$ jest momentem bezwładności bloczka, a $\omega = v / R$ jego prędkością kątową. Z warunku $\Delta T + \Delta V = 0$, wynikającego z zasady zachowania energii, otrzymamy równanie:

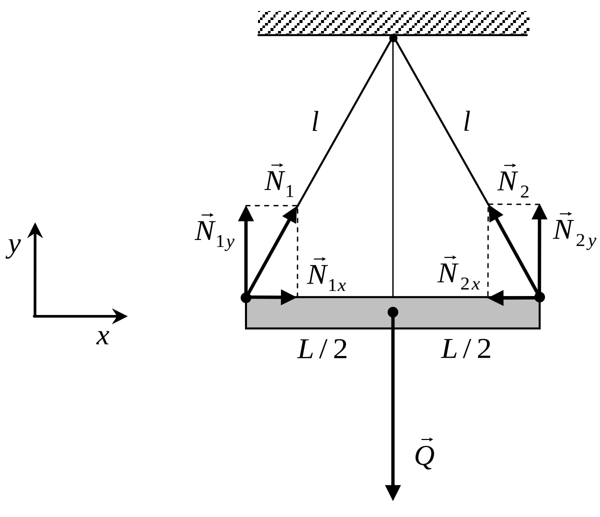
$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + (m_1 - m_2) g \frac{v^2}{2a} = 0 .$$

Rozwiązaniem tego równania jest przyspieszenie a o wartości identycznej z wartością przyspieszenia otrzymanego pierwszym sposobem:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g .$$

Przykład 5.2. Jednorodna, sztywna belka o długości $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$ i ciężarze $Q = 400\,\mathrm{N}$ wisi na dwóch linach zaczepionych do jej końców. Dwa pozostałe końce lin podczepione są do wspólnego zawiesia. Długość każdej z lin wynosi $l = 1{,}4\,\mathrm{m}$. Obliczyć naprężenia lin zakładając, że ich ciężar jest nieporównywalnie mniejszy od ciężaru belki.

Rozwiązanie:



Na układ działają naprężenia nici $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ oraz ciężar belki $\vec{Q}$. Warunek równowagi statycznej (5.8) przyjmie postać:

$$\vec{Q} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0 .$$

Warunek ten równoważny jest dwóm zapisom skalarnym (5.9):

$$\begin{cases} 0 + N_{1x} - N_{2x} = 0 , \\ -Q + N_{1y} + N_{2y} = 0 . \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $N_{1x} = N_{2x} \equiv N_x$. Z symetrii zagadnienia oraz z drugiego równania wynika, że $N_{1y} = N_{2y} \equiv N_y = Q/2$. Naprężenia lin muszą więc być takie same: $N_1 = N_2 = N$. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów (rysunek) wynika ponadto proporcja:

$$\frac{N_y}{N} = \frac{\sqrt{l^2 - (L/2)^2}}{l} .$$

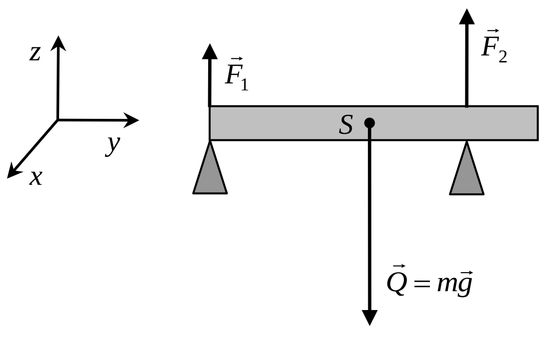
Podstawiając w powyższym równaniu $N_y = Q/2$ znajdziemy:

$$N = \frac{Ql}{\sqrt{4l^2 - L^2}} .$$

Uwzględniając dane liczbowe otrzymamy: $N_1 = N_2 = N = 236{,}85\,\mathrm{N}$.

Przykład 5.3. Jednorodna, metalowa belka o długości $L = 5\,\mathrm{m}$ i masie $m = 100\,\mathrm{kg}$ spoczywa na dwóch podporach. Punkty podparcia belki znajdują się: jeden na jednym jej końcu, a drugi w odległości $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ od jej drugiego końca. Obliczyć reakcje podpór.

Rozwiązanie:



Na układ działają siły: ciężar belki $\vec{Q}$ oraz reakcje podpór $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Warunek równowagi sił (5.8) ma postać:

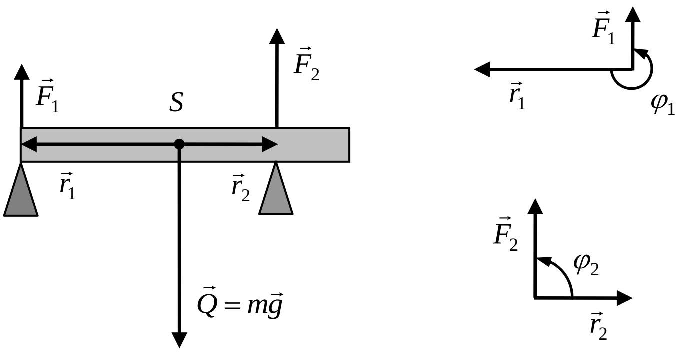
$$\vec{Q} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 .$$

Ponieważ brak jest składowych sił wzdłuż osi x oraz y, więc równanie to możemy zapisać w postaci jednego równania skalarnego odniesionego do kierunku z:

$$-Q + F_1 + F_2 = 0.$$

Jest to równanie z dwoma niewiadomymi: F_1 i F_2. Warunek ten jak widać nie wystarcza do znalezienia reakcji podpór. Aby znaleźć drugie równanie, korzystamy z warunku (5.10) równoważenia się wszystkich momentów sił działających na układ:

$$\vec{M}_Q + \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} = 0$$



Jeżeli przyjmiemy, że punkt, względem którego liczymy momenty sił znajduje się w środku ciężkości S belki, to moment siły $\vec{Q}$ będzie równy zeru, a momenty sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ będą odpowiednio równe:

$$\vec{M}_{F_1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = r_1 F_1 \sin\varphi_1 \, \vec{i} = -\frac{L}{2} F_1 \vec{i}, \quad (\varphi_1 = 270°, \; r_1 = \frac{L}{2}),$$

$$\vec{M}_{F_2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = r_2 F_2 \sin\varphi_2 \, \vec{i} = \left(\frac{L}{2} - l\right) F_2 \vec{i}, \quad (\varphi_2 = 90°, \; r_2 = \frac{L}{2} - l).$$

Warunek równoważenia się momentów sił przyjmie więc postać:

$$-\frac{L}{2} F_1 + \left(\frac{L}{2} - l\right) F_2 = 0.$$

Powyższe równanie jest drugim - brakującym równaniem pozwalającym na obliczenie reakcji podpór. Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$F_1 = \frac{L - 2l}{2(L-l)} mg, \quad F_2 = \frac{L}{2(L-l)} mg.$$

Uwzględniając dane liczbowe znajdziemy: $F_1 = 285{,}7\,\mathrm{N}$, $F_2 = 714{,}3\,\mathrm{N}$. Można sprawdzić, że rezultat ten pozostanie bez zmian, jeżeli momenty sił będą liczone względem innego, dowolnie wybranego punktu odniesienia.

Zadania

5.1. Obliczyć energię kinetyczną kuli o masie $m = 500\,\mathrm{g}$ i promieniu $r = 10\,\mathrm{cm}$ wirującą z częstotliwością $f = 3\,\mathrm{obr/s}$.

5.2. Obliczyć pracę, jaką należy wykonać, aby koło zamachowe o masie $m = 30\,\mathrm{kg}$ i promieniu $r = 40\,\mathrm{cm}$ rozpędzić tak, aby wykonywało $n = 60$ obrotów na minutę?

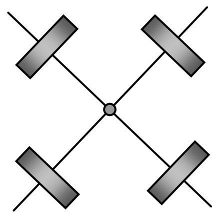
5.3. Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 50\,\mathrm{kgm}^2$ obraca się z prędkością kątową $\omega = 30\,\mathrm{rad/s}$. Obliczyć moment hamujący M, pod którego działaniem koło zamachowe zatrzymuje się po upływie czasu $t = 25\,\mathrm{s}$.

5.4. Rura i jednorodny walec o takich samych masach $m = 2\,\mathrm{kg}$ toczą się bez poślizgu z jednakową prędkością liniową v. Znaleźć energię kinetyczną T_w walca, jeżeli energia kinetyczna rury wynosi $T_r = 150\,\mathrm{J}$.

5.5. Na krześle obracającym się z częstotliwością $f = 0{,}75\,\mathrm{Hz}$ siedzi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach hantle o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ każda. Odległość hantli do osi obrotu wynosi $r = 0{,}7\,\mathrm{m}$. Jaka będzie częstotliwość obrotów krzesła, jeżeli człowiek przyciągnie hantle na odległość $d = 40\,\mathrm{cm}$ od osi obrotu? Sumaryczny moment bezwładności człowieka z wyciągniętymi ramionami i krzesła względem osi obrotu wynosi $I = 2{,}5\,\mathrm{kgm}^2$. Moment bezwładności człowieka z podkurczonymi ramionami i krzesła jest o 10% mniejszy.

5.6. Na środku tarczy o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ i promieniu $r = 2{,}5\,\mathrm{m}$, wirującej z częstotliwością $f_0 = 1\,\mathrm{Hz}$ dokoła osi przechodzącej przez jej środek, znajduje się człowiek o masie $m = 75\,\mathrm{kg}$. Jak zmieni się częstotliwość obrotów tarczy, gdy człowiek przejdzie na jej skraj?

5.7. Jak zmieni się energia kinetyczna wahadła Oberbecka, jeżeli zwiększymy w nim dwukrotnie odległość mas od osi obrotu i jednocześnie zwiększymy dwa razy jego prędkość kątową?



5.8. W górę równi pochyłej, o kącie nachylenia $\alpha = 30°$, wtacza się walec, który u podstawy równi miał prędkość $v = 7\,\mathrm{m/s}$. Obliczyć drogę, która pokona walec do momentu zatrzymania się.

5.9. Z równi pochyłej o wysokości h stacza się bez poślizgu jednorodna kula o masie m i promieniu r. Jaką prędkość osiągnie kula u podstawy równi?

5.10. Na szczycie równi pochyłej o długości l, nachylonej do poziomu pod kątem α, znajduje się jednorodny walec, który został swobodnie puszczony. Jaką prędkość uzyska środek masy walca u podnóża równi?

5.11. Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia μ, aby jednorodny walec mógł staczać się bez poślizgu po równi pochyłej tworzącej z poziomem kąt $\alpha = 30°$?

5.12. Kula o promieniu $r = 10\,\mathrm{cm}$ obraca się wokół poziomej osi z prędkością kątową $\omega = 600\,\mathrm{rad/min}$. Kulę opuszczono na płaszczyznę poziomą. Po jakim czasie kula zacznie się toczyć bez poślizgu? Obliczyć prędkość toczenia się. Współczynnik tarcia poślizgowego pomiędzy walcem i płaszczyzną wynosi $\mu = 0{,}1$.

5.13. Walec o promieniu $r = 20\,\text{cm}$ pchnięto z prędkością $v = 10\,\text{m/s}$. Po jakim czasie walec zacznie się toczyć bez poślizgu? Obliczyć prędkość toczenia się walca. Współczynnik tarcia poślizgowego pomiędzy walcem i płaszczyzną wynosi $\mu = 0{,}1$.

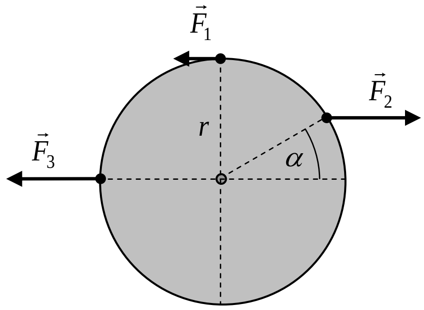
5.14. Na szczycie równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ i wysokości $h = 1\,\text{m}$ znajdują się walec i rura o jednakowych masach $m = 20\,\text{kg}$ i promieniach $r = 50\,\text{cm}$. Oblicz wartość siły tarcia i przyspieszenie każdego z ciał w przypadku, gdy:

a) staczają się one bez poślizgu,
b) zsuwają się bez tarcia.

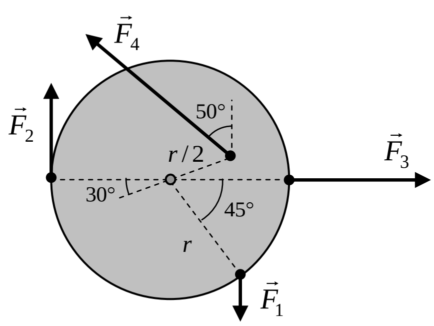
Jaki jest stosunek ich prędkości na końcu równi, gdy staczały się bez poślizgu?

5.15. Z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 35°$ stacza się bez poślizgu jednorodny walec oraz cienkościenna rura. Masy i promienie walca oraz rury są takie same i odpowiednio wynoszą $m = 0{,}5\,\text{kg}$ i $r = 20\,\text{cm}$. W jakiej odległości od siebie znajdowały się początkowo ich osie, jeśli po czasie $t = 3\,\text{s}$ nastąpiło ich zderzenie?

5.16. Na jednorodny walec o gęstości $\rho = 4\,\text{g/cm}^3$, promieniu $r = 5\,\text{cm}$ i wysokości $h = 10\,\text{cm}$ działają siły tak, jak to przedstawiono na rysunku. Jakie jest przyspieszenie liniowe i kątowe tego walca? W którą stronę będzie się walec przesuwał, a w którą obracał? Dane: $F_1 = 1\,\text{N}$, $F_2 = 2\,\text{N}$, $F_3 = 2\,\text{N}$, $\alpha = 30°$.

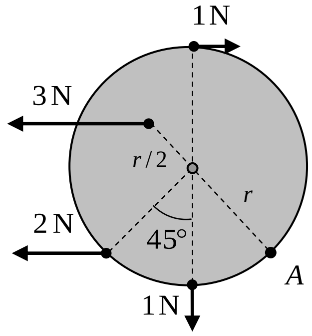


5.17. Z jakim przyspieszeniem liniowym oraz kątowym porusza się walec o masie $m = 5\,\text{kg}$ i promieniu $r = 50\,\text{cm}$? Miejsca przyłożenia sił oraz ich kierunek działania pokazuje rysunek. Wartości sił wynoszą: $F_1 = 1\,\text{N}$, $F_2 = 2\,\text{N}$, $F_3 = 3\,\text{N}$, $F_4 = 4\,\text{N}$.



5.18. Czy istnieje siła, która przyłożona w połowie promienia walca z poprzedniego zadania spowoduje, że walec będzie się znajdował w spoczynku? Jaka byłaby wartość takiej siły, kierunek działania, zwrot i punkt przyłożenia?

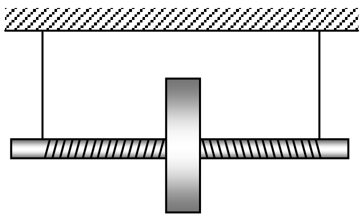
5.19. Na swobodny krążek, oprócz sił przedstawionych na rysunku, działa w punkcie A nieznana siła F_A. Wyznaczyć przyspieszenie kątowe krążka, wiedząc, że krążek nie porusza się ruchem postępowym.



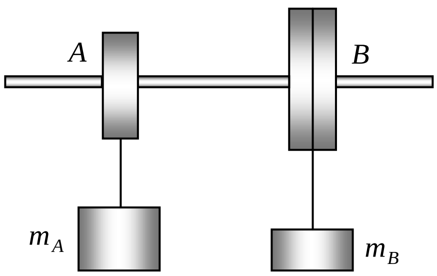
5.20. Na jednorodny walec o promieniu $r = 10\,\text{cm}$ i masie $m = 100\,\text{g}$, osadzony na poziomej osi obrotu przechodzącej przez oś walca, nawinięto nieważką i nierozciągliwą nić, do której przyczepiono ciało o masie $m = 0{,}5\,\text{kg}$. Obliczyć przyspieszenie kątowe walca oraz siłę naciągu nici.

5.21. Koło zamachowe osadzono na wale o promieniu $r = 20\,\text{cm}$. Układ ten ma względem osi wału moment bezwładności $I = 20\,\text{kgm}^2$. Na wał nawinięto linę, na której zawieszono ciało o masie $m = 5\,\text{kg}$. Pod wpływem własnego ciężaru ciało to zaczyna się poruszać obracając wał. Jaką drogę przebędzie to ciało w czasie $t = 1\,\text{min}$?

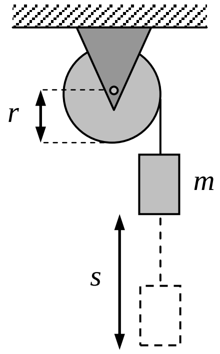
5.22. Krążek Maxwella składa się z jednorodnego krążka o promieniu $R = 10\,\text{cm}$ i masie $M = 30\,\text{dkg}$, osadzonego na osi o promieniu $r = 5\,\text{cm}$ i masie $m = 10\,\text{dkg}$. Na oś nawinięte są przyczepione do sufitu nici, utrzymujące oś w położeniu poziomym. Z jakim przyspieszeniem będzie się poruszał krążek Maxwella?



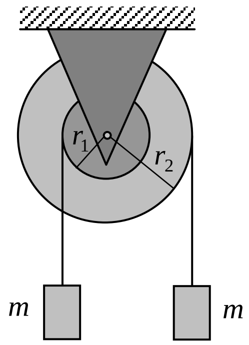
5.23. Na cienkiej osi, o zaniedbywalnej masie, znajdują się dwa dyski obciążone ciężarkami. Obliczyć przyspieszenie kątowe osi oraz przyspieszenie liniowe każdego z ciężarków. Masy i promienie dysków: $M_A = 4\,\text{kg}$, $M_B = 6\,\text{kg}$, $R_A = 8\,\text{cm}$, $R_B = 10\,\text{cm}$. Masy ciężarków: $m_A = 6\,\text{kg}$, $m_B = 5\,\text{kg}$.



5.24. Jeden koniec linki został nawinięty na bloczek o promieniu $r = 25\,\text{cm}$, a do drugiego przyczepiono ciężarek o masie $m = 2\,\text{kg}$. Jaki jest moment bezwładności bloczka, jeżeli w czasie $t = 3\,\text{s}$ od rozpoczęcia ruchu, ciężarek przebył drogę $s = 1\,\text{m}$?

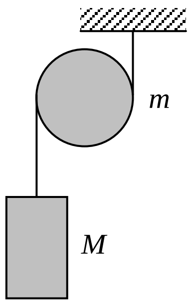


5.25. Kołowrót o momencie bezwładności $I = 1\,\text{kgm}^2$ składa się z dwóch krążków o promieniach $r_1 = 10\,\text{cm}$ oraz $r_2 = 20\,\text{cm}$. Na krążki nawinięto w przeciwnych kierunkach dwie linki, a do ich końców przyczepiono jednakowe odważniki o masach $m = 1\,\text{kg}$. Obliczyć przyspieszenie kątowe kołowrotu oraz naprężenia linek.

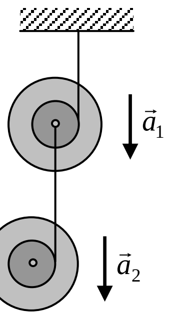


5.26. Na jednorodny walec o masie $m = 0{,}5\,\text{kg}$ i promieniu $r = 15\,\text{cm}$ nawinięto nić o długości $l = 5\,\text{m}$, której wolny koniec przytwierdzono do sufitu. Walec „odkręca" się od nici pod wpływem własnego ciężaru. Znaleźć przyspieszenie i siłę naciągu nici oraz prędkość kątowa walca po rozwinięciu się nici.

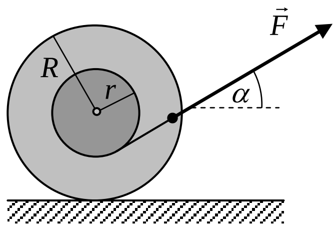
5.27. Na walec o masie $m = 2\,\text{kg}$ nawinięto dwie pary nitek. Jedna z nich, doczepiona do sufitu, podtrzymuje walec w poziomie. Do drugiej pary przymocowano ciężarek o masie $M = 1\,\text{kg}$. Obliczyć przyspieszenie liniowe krążka.



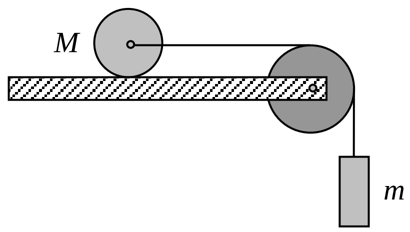
5.28. „Jojo” jest zabawką składającą się z dwóch dysków przytwierdzonych centralnie po przeciwnych stronach wspólnej osi. Na osi, pomiędzy dyskami, nawinięta jest nić umożliwiająca podtrzymywanie zabawki. Dwie jednakowe takie zabawki połączono tak, jak na rysunku. Obliczyć przyspieszenie, z jakim porusza się każda z nich, jeżeli ich masa wynosi $m = 20\,\mathrm{g}$, moment bezwładności $I = 1\,\mathrm{kgm}^2$, a promień osi $r = 1\,\mathrm{cm}$.



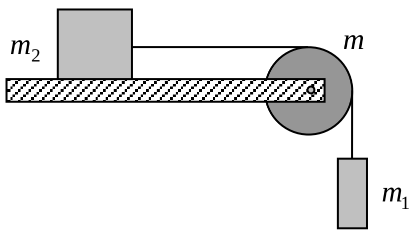
5.29. Nić, nawiniętą na szpulę o masie m i momencie bezwładności I, ciągniemy z siłą F skierowaną pod kątem α do poziomu. W którą stronę i z jakim przyspieszeniem porusza się szpula? Ile wynosi siła tarcia szpuli o podłoże? Przy jakiej wartości siły F szpula będzie się ślizgać po stole? Promień zewnętrzny i wewnętrzny szpuli wynosi odpowiednio R i r. Współczynnik tarcia szpuli o podłoże wynosi μ.



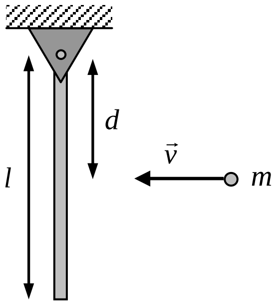
5.30. Przez bloczek znajdujący się na rogu stołu przerzucono linkę, której końce zaczepiono do ciężarka o masie $m = 6\,\mathrm{kg}$ oraz osi, która przechodzi przez środek kuli o masie $M = 10\,\mathrm{kg}$. Obliczyć przyspieszenie liniowe ciężarka i kuli, jeśli wiadomo, że kula toczy się po stole bez poślizgu.



5.31. Przez znajdujący się na rogu stołu bloczek o masie $m = 0{,}7\,\mathrm{kg}$ i promieniu $r = 7\,\mathrm{cm}$ przerzucono linkę, której końce zaczepiono do ciężarka o masie $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ oraz klocka o masie $m_2 = 7\,\mathrm{kg}$. Obliczyć przyspieszenie liniowe układu mas, jeśli wiadomo, że współczynnik tarcia między masą m_2, a stołem wynosi $\mu = 0{,}2$. Jaka jest graniczna wartość współczynnika μ, powyżej której układ przestanie się swobodnie przemieszczać?

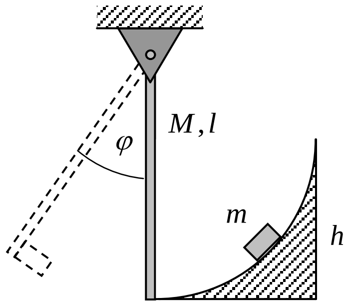


5.32. Deska o masie M i długości $l = 3\,\text{m}$ może się obracać swobodnie wokół osi przechodzącej przez jej górny koniec. Pocisk o masie $m << M$, lecąc poziomo z prędkością v, uderza w deskę i pozostaje w niej. W jakiej odległości d od osi obrotu powinien uderzyć pocisk, aby w momencie jego uderzenia w deskę, na jej zawieszenie nie zadziałała siła reakcji?

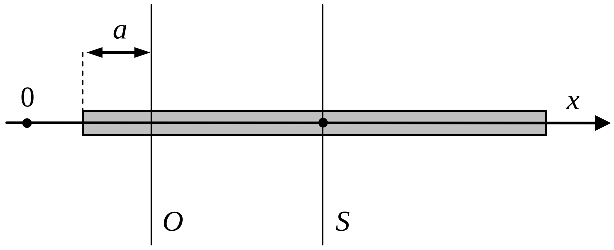


5.33. Student o masie $m = 75\,\text{kg}$ wskakuje z prędkością $v_s = 3\,\text{m/s}$ na koniec wąskiej deski o masie $m = 75\,\text{kg}$ i długości $l = 5\,\text{m}$, prostopadle do jej długości. Jaka będzie prędkość ruchu postępowego oraz obrotowego, z jakimi deska wraz ze studentem będzie się poruszała? Pomiędzy deską i podłożem nie występują siły tarcia.

5.34. Ciało o masie $m = 2\,\text{kg}$ zsuwa się bez tarcia z wysokości $h = 10\,\text{cm}$ i uderza w pręt o masie $M = 5\,\text{kg}$ i długości $l = 50\,\text{cm}$, przyklejając się do niego. Obliczyć kąt φ, o jaki obróci się pręt wokół punktu zamocowania w wyniku tego zderzenia.



5.35. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego pręta o długości l i gęstości liniowej λ względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej w odległości a od jednego z jego końców. Obliczyć również moment bezwładności tego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek masy. Sprawdzić twierdzenie Steinera.

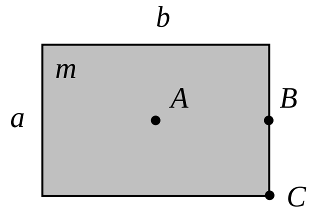


5.36. Obliczyć moment bezwładności względem osi symetrii prostopadłej do jednorodnej tarczy stalowej o średnicy $D = 20\,\text{cm}$ i masie $m = 250\,\text{g}$, w której centralnie wycięto otwór o średnicy $d = 1\,\text{cm}$.

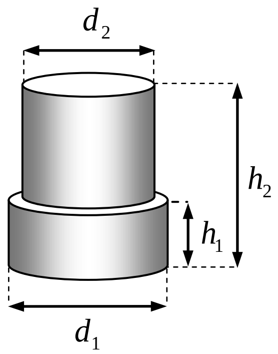
5.37. Jaki jest moment bezwładności prostokątnej płytki o masie m i bokach $a = 20\,\mathrm{cm}$ i $b = 30\,\mathrm{cm}$ względem osi:

a) prostopadłej do płaszczyzny płytki i przechodzącej przez punkt: A, B lub C,

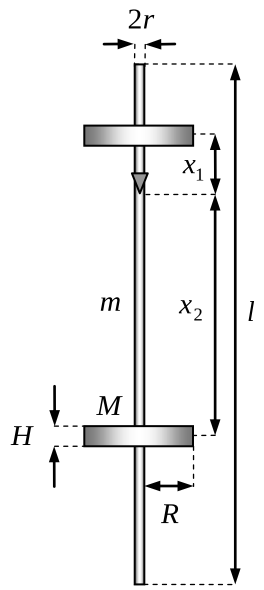
b) równoległej do boku a i przechodzącej przez punkt A lub C?



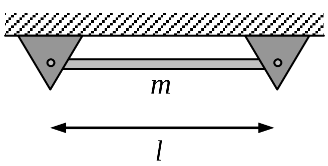
5.38. Obliczyć moment bezwładności bryły o masie $m = 125\,\mathrm{g}$ i wymiarach: $h_1 = 1{,}2\,\mathrm{cm}$, $h_2 = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $d_1 = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ i $d_2 = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, względem osi pokrywającej się z jego osia symetrii.



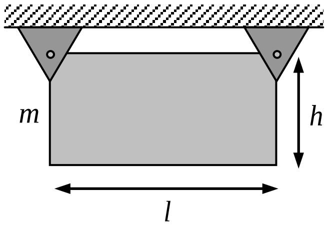
5.39. Obliczyć moment bezwładności wahadła rewersyjnego względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez punkt zawieszenia wahadła. Wahadło składa się z pręta o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, promieniu $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ i długości $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ oraz dwóch identycznych soczewek w kształcie walców o masie $M = 1\,\mathrm{kg}$, promieniu $R = 10\,\mathrm{cm}$ i wysokości $H = 2\,\mathrm{cm}$ każda. Pręt zawieszony jest w 1/5 swojej długości. Jedna soczewka znajduje się w odległości $x_1 = 10\,\mathrm{cm}$ ponad punktem zawieszenia pręta, a druga w odległości $x_2 = 70\,\mathrm{cm}$ poniżej tego punktu.



5.40. Na dwóch sworzniach zawieszony jest poziomo drążek o długości $l = 0{,}8\,\mathrm{m}$ i masie $m = 0{,}4\,\mathrm{kg}$. W pewnej chwili jeden ze sworzni uległ zerwaniu i drążek zaczął obracać się wokół drugiego sworznia. Obliczyć początkowe przyspieszenie kątowe drążka.



5.41. Na dwóch sworzniach zawieszona jest metalowa płyta o wysokości $h = 0{,}4\,\mathrm{m}$, szerokości $l = 0{,}8\,\mathrm{m}$ i masie $m = 4\,\mathrm{kg}$. W pewnej chwili jeden ze sworzni uległ zerwaniu i płyta zaczęła obracać się wokół drugiego sworznia. Obliczyć początkowe przyspieszenie kątowe płyty.



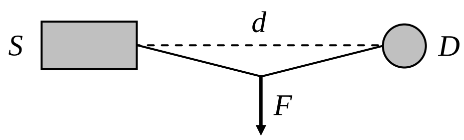
5.42. Wypadkowa trzech sił działających na punkt P jest równa zeru. Wyznaczyć wartość i kierunek siły F_3, jeżeli siła $F_1 = 100\,\mathrm{N}$ jest pozioma i skierowana w prawo, a pionowa siła $F_2 = 200\,\mathrm{N}$ skierowana jest w dół.

5.43. Lina o długości l leży na stole częściowo zwisając. Przy jakiej długości h zwisającego odcinka, lina nie ześlizgnie się ze stołu? Współczynnik tarcia liny o stół wynosi μ?

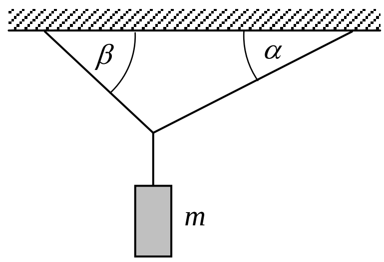
5.44. Klocek o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ znajduje się na równi o kącie nachylenia $\alpha = 60°$. Jaką siłą prostopadłą do równi należy go przycisnąć, aby pozostawał w spoczynku? Współczynnik tarcia pomiędzy równią a klockiem wynosi $\mu = 0{,}1$.

5.45. Jaki nacisk wywierają na podłoże poszczególne koła samochodu o masie $M = 1200\,\mathrm{kg}$, jeżeli odległość pomiędzy osiami wynosi $l = 3\,\mathrm{m}$, a środek masy samochodu znajduje się na jego osi podłużnej w odległości $x = 1{,}2\,\mathrm{m}$ za osią przednią?

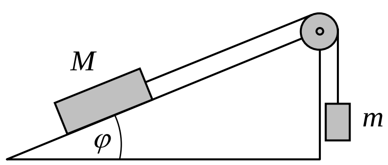
5.46. Aby wyciągnąć samochód, który ugrzązł w zaspie śnieżnej, kierowca przewiązał linę o długości $l = 10{,}5\,\mathrm{m}$ pomiędzy samochodem, a odległym o $d = 10\,\mathrm{m}$ przydrożnym drzewem. Jaka siła działała na samochód, kiedy kierowca uchwycił linę w połowie jej długości i naprężył w kierunku prostopadłym do linii samochód - drzewo z siłą $F = 500\,\mathrm{N}$?



5.47. Ciężar o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ zawieszono na dwóch linach tworzących z poziomem kąty $\alpha = 30°$ i $\beta = 45°$. Wyznaczyć siły naprężające liny.



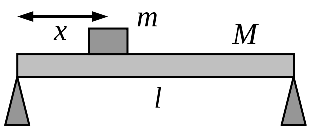
5.48. Obliczyć minimalną i maksymalną wartość masy m, aby układ pokazany na rysunku pozostawał nieruchomy. Równia o kącie nachylenia α przymocowana jest do podłoża. Współczynnik tarcia między ciałem o masie M, a powierzchnią równi wynosi μ.



5.49. Ciężarek zważono na wadze o niejednakowej długości ramion. Gdy spoczywał on na pierwszej szalce, ciężar odważników na drugiej wynosił $Q_1 = 1{,}2\,\mathrm{N}$. Po przełożeniu ciężarka na drugą szalkę, na szalkę pierwszą trzeba było położyć odważniki o ciężarze $Q_2 = 1{,}7\,\mathrm{N}$, aby szalki pozostały w równowadze. Jaka jest masa ciężarka oraz które z ramion wagi jest dłuższe?

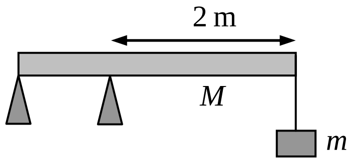
5.50. Dwóch robotników niesie poziomo drewnianą belkę o masie $m = 50\,\text{kg}$ i długości $l = 5\,\text{m}$. Jeden z nich trzyma za koniec belki, a drugi podtrzymuje ją w odległości $d = 0{,}5\,\text{m}$ od przeciwległego końca. Z jaką siłą działa na belkę każdy z robotników? Czy naciski te zmienią się, jeśli nachylenie belki w trakcie przenoszenie będzie wynosiło $\alpha = 20°$?

5.51. Belka o masie $M = 20\ \text{kg}$ i długości $l = 2\,\text{m}$ spoczywa na dwóch podporach. Na belce, w odległości x od jednej z podpór, znajduje się ciężar o masie $m = 2\,\text{kg}$. Jak zależy nacisk wywierany na poszczególne podpory od odległości *x*? Rozwiązanie przedstawić na wykresie.

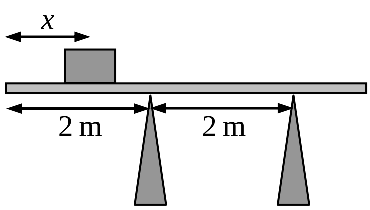


5.52. Jednorodna belka o długości $l = 100\,\text{cm}$ jest podparta w odległości $x = 35\,\text{cm}$ od lewego końca. Aby belka była w równowadze, należy obciążać ją dodatkowym ciężarkiem o masie $m = 7\,\text{kg}$ w odległości $d = 15\,\text{cm}$ od jej lewego końca. Jaka jest masa belki?

5.53. Ciężar o masie $m = 2\,\text{kg}$ został zawieszony na 3-metrowej belce o masie $M = 5\,\text{kg}$. Belka zamocowana jest na dwóch podporach tak, jak to przedstawiono na rysunku. Jakie siły wywierają te podpory na belkę?

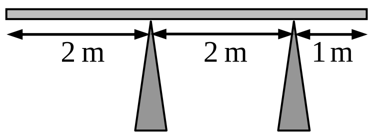


5.54. Na dwóch podporach leży deska o masie $m = 5\,\text{kg}$ i długości $l = 5\,\text{m}$. Jaki maksymalny ciężar można położyć w odległości x $(0 \le x \le l)$ od lewego krańca deski, aby nie zaczęła się ona obracać? Belka nie może ulec wykrzywieniu ani złamaniu.



5.55. Jaki maksymalny ciężar można położyć na desce z poprzedniego zadania, aby znajdowała się ona w równowadze, niezależnie od miejsca gdzie znajduje się ten ciężar? Jak zmienia się nacisk na każdą z podpór, w zależności od położenia tego ciężaru? Gdzie należy położyć ciężar, aby naciski na obie podpory były jednakowe?

5.56. Belka o masie $m = 5\,\text{kg}$ spoczywa na dwóch podporach. Na jednym z jej końców znajduje się ciężar o masie $M = 20\,\text{kg}$. Jaki minimalny i jaki maksymalny ciężar położony na drugim z końców belki nie spowoduje zachwiania równowagi? Jakie będą wówczas naciski na podpory?



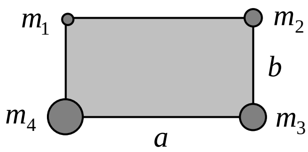
5.57. Na końcach jednorodnego pręta o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ i długości $l = 2\,\mathrm{m}$ znajdują się masy $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$. Jaka powinna być wartość i punkt przyłożenia dodatkowej siły F, aby pręt znajdował się w równowadze?

5.58. Na końce belki o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ i długości $l = 4\,\mathrm{m}$ działają pionowe siły $F_1 = 20\,\mathrm{N}$ i $F_2 = 10\,\mathrm{N}$. W którym punkcie należy przyłożyć dodatkową siłę i jaka powinna być jej wartość, aby belka pozostawała w spoczynku i była nachylona pod katem $\alpha = 30°$ do poziomu?

5.59. Na pręt działają dwie siły o tych samych kierunkach, przeciwnych zwrotach i wartościach $F_1 = 10\,\mathrm{N}$ oraz $F_2 = 5\,\mathrm{N}$. Siły te przyłożone są w punktach odległych od siebie o $x = 50\,\mathrm{cm}$. Jaka powinna być wartość i punkt przyłożenia dodatkowej siły F, aby pręt znajdował się w równowadze? Jak wynik zadania zależy od kąta, jaki tworzą siły F_1 i F_2 z prętem? Masę pręta zaniedbać.

5.60. Deska leży na platformie tak, że jeden z jej końców wystaje poza platformę. Długość tego wystającego końca jest równa 1/4 całkowitej długości deski. Gdy do wystającego końca deski przyłożono siłę $F = 1000\,\mathrm{N}$, deska zaczęła się przechylać. Jaka jest masa deski?

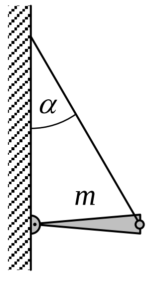
5.61. W rogach prostokątnej płyty o bokach $a = 50\,\mathrm{cm}$ i $b = 20\,\mathrm{cm}$ oraz masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ znajdują się cztery kule o masach: $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 3\,\mathrm{kg}$ i $m_4 = 4\,\mathrm{kg}$. Środki kul znajdują się dokładnie w rogach płyty. W jakim punkcie należy podeprzeć płytę, aby znajdowała się ona w równowadze?



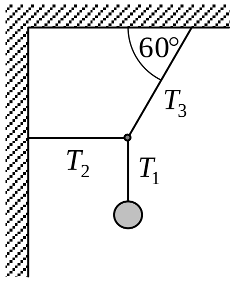
5.62. Metalowy drążek o masie $M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ i długości $l = 1\,\mathrm{m}$ został zawieszony poziomo na dwóch równoległych, pionowych dynamometrach sprężynowych. Do drążka podwieszony jest ciężarek o masie $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, w odległości $a = 0{,}25\,\mathrm{m}$ od środka drążka. Ile wynoszą wskazania oraz współczynniki sprężystości każdego z dynamometrów, jeżeli ich sprężyny wydłużyły się o $x = 10\,\mathrm{cm}$?

5.63. Metalowy drążek został zawieszony na dwóch równoległych, pionowych sprężynach o jednakowej długości. Współczynniki sprężystości tych sprężyn wynoszą $k_1 = 0{,}2\,\mathrm{N/m}$ oraz $k_2 = 0{,}4\,\mathrm{N/m}$, a odległość pomiędzy nimi wynosi $l = 1\,\mathrm{m}$. W jakim miejscu drążka należy zawiesić dodatkowy ciężar, aby pozostał on poziomy?

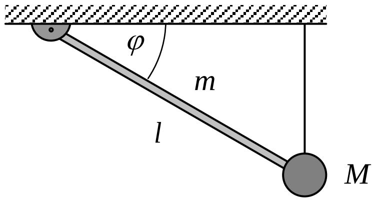
5.64. Jeden koniec belki o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ zawieszony jest na przegubie do ściany. Drugi koniec belki podtrzymuje lina tak, że kąt pomiędzy liną a ścianą wynosi $\alpha = 30°$. Z jaką siłą i jak skierowaną, działa na przegub belka, jeżeli środek masy belki znajduje się w 1/3 jej długości?



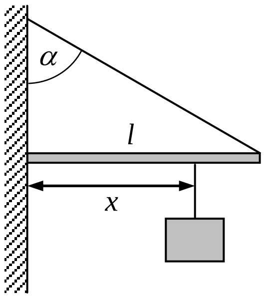
5.65. Kula o masie $m = 10\,\text{kg}$ została zawieszona na linkach tak, jak to przedstawiono na rysunku. Obliczyć naprężenia poszczególnych linek.



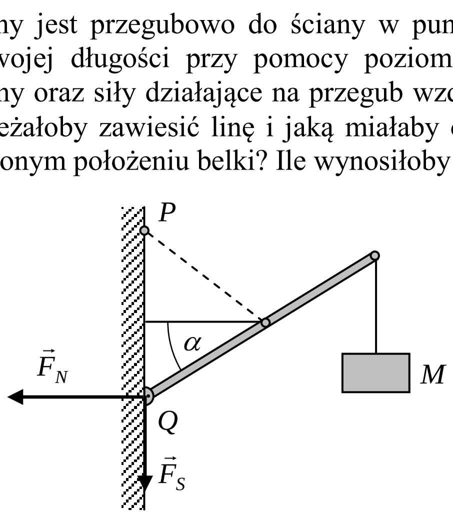
5.66. Do sufitu przymocowany jest na zawiasie pręt o masie $m = 2\,\text{kg}$ i długości $l = 1\,\text{m}$. Na końcu pręta znajduje się dodatkowy ciężarek o masie $M = 1\,\text{kg}$. Pręt jest utrzymywany w położeniu odchylonym od poziomu o kąt $\varphi = 30°$ za pomocą linki zorientowanej pionowo pomiędzy końcem pręta a sufitem. Jakie jest naprężenie linki oraz jaka siła wywierana jest na zawias?



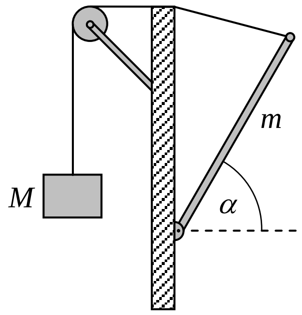
5.67. Pręt o długości l i masie m jest przytknięty lewym końcem do ściany i utrzymywany w pozycji poziomej przez linkę przymocowaną do jego prawego końca. Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia pomiędzy ścianą i prętem, przy której pręt pozostanie w spoczynku? W jakiej odległości x od lewego krańca pręta można wówczas zamocować dodatkowy ciężarek, aby niezależnie od jego masy pręt pozostawał w równowadze? Linka podtrzymująca pręt tworzy ze ścianą kąt $\alpha = 60°$.



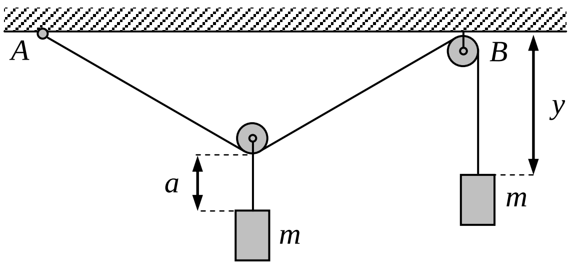
5.68. Blok o masie $M = 50\,\text{kg}$ zawieszony jest na końcu belki o masie $m = 20\,\text{kg}$ i długości $l = 5\,\text{m}$. Drugi koniec belki zamocowany jest przegubowo do ściany w punkcie *Q*. Dodatkowo, belka jest podtrzymywana w połowie swojej długości przy pomocy poziomej liny, tworzącej z belką kąt $\alpha = 30°$. Znaleźć naprężenie liny oraz siły działające na przegub wzdłuż oraz prostopadle do ściany. W jakim punkcie ściany *P* należałoby zawiesić linę i jaką miałaby ona długość, aby jej naprężenie było minimalne, przy niezmienionym położeniu belki? Ile wynosiłoby to naprężenie?



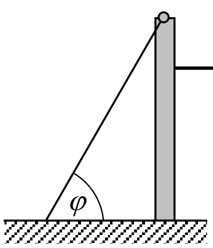
5.69. Jednorodny pręt o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ i długości $l = 2\,\mathrm{m}$ przymocowany jest do muru na przegubie. Do drugiego końca pręta przywiązano, przerzuconą przez mur i bloczek linkę, na końcu której znajduje się ciężarek masie M. Jaka powinna być masa ciężarka, aby układ znajdował się w równowadze, a pręt tworzył kąt $\alpha = 60°$ z poziomem? Jak zmieni się energia potencjalna układu, jeżeli ciężarek przesunie się w górę lub w dół na odległość $h = 10\,\mathrm{cm}$? W jakim rodzaju równowagi znajduje się układ? Odległość od przegubu do szczytu muru równa jest długości pręta.



5.70. Nieważka i nierozciągliwa linka o długości l zamocowana jest do sufitu w punkcie A oraz przerzucona przez bloczek zamocowany w punkcie B. Odległość między punktami A i B wynosi $2b$. Do swobodnego końca linki przymocowano ciężarek o masie m. Identyczny ciężarek zawieszono na lince przy pomocy swobodnego, nieważkiego bloczka, tak jak to pokazano na rysunku. Jak zależy energia potencjalna układu od odległości y? Ile powinna wynosić ta odległość, aby układ znajdował się w równowadze? Jaki to rodzaj równowagi?

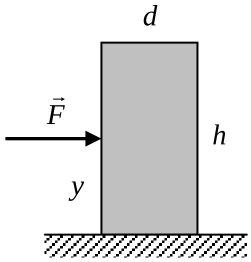


5.71. Pręt o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ i masie m utrzymywany jest w pozycji pionowej przez linkę przymocowaną do jego górnego końca oraz przez przyłożoną na wysokości h i prostopadłą do pręta siłę F. Jaka jest minimalna wysokość h, przy której dowolnie duża wartość siły F nie spowoduje wytrącenia pręta z położenia równowagi? Kąt między linką, a podłożem $\varphi = 60°$. Współczynnik tarcia pomiędzy prętem, a podłożem $\mu = 0{,}4$.



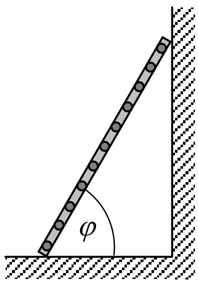
5.72. Drzwi o szerokości $d = 85\,\mathrm{cm}$, wysokości $h = 205\,\mathrm{cm}$ i masie $m = 15\,\mathrm{k}g$ zawieszone są na zawiasach znajdujących się w odległości $x = 25\,\mathrm{cm}$ od ich górnej i dolnej krawędzi. Jakie są pionowe i poziome składowe sił działających na zawiasy? Przyjąć, że wartości sił działających na oba zawiasy są takie same.

5.73. Na stole stoi klocek o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, wysokości $h = 30\,\mathrm{cm}$, długości $d = 10\,\mathrm{cm}$ i szerokości $l = 5\,\mathrm{cm}$. Na klocek działa siła F przyłożona na wysokości y i w połowie jego szerokości. Współczynnik tarcia klocka o podłoże $\mu = 0{,}25$. Jak zależy wartość siły potrzebnej do poruszenia klocka od wysokości, na jakiej ta siła działa? Kiedy będzie to obrót, a kiedy przesunięcie? Rozwiązanie przedstaw na wykresie.



5.74. Szafka o wysokości $h = 1\,\mathrm{m}$, głębokości $d = 0{,}60\,\mathrm{m}$ i masie $m = 15\,\mathrm{kg}$ stoi na czterech nóżkach. Po przyłożeniu z przodu szafki siły F w połowie jej szerokości i na wysokości $H = 0{,}75\,\mathrm{m}$, szafka porusza się ruchem jednostajnym. Jaka jest wartość siły przyłożonej do szafki oraz jaka siła działa na każdą z czterech nóżek? Współczynnik tarcia pomiędzy nóżkami i podłogą $\mu = 0{,}25$.

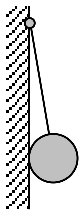
5.75. Drabina o masie m opiera się o idealnie gładką ścianę. Środek ciężkości drabiny znajduje się w połowie jej długości. Znaleźć graniczy kąt φ oparcia drabiny o podłogę, przy którym drabina się osunie. Współczynnik tarcia drabiny o podłogę $\mu = 0{,}4$.



5.76. O ścianę oparto drabinę o masie $m = 20\,\mathrm{kg}$. Środek ciężkości drabiny znajduje się w odległości 1/3 jej długości od dolnego końca. Jaką poziomą siłę F należy przyłożyć do środka drabiny, aby jej górny koniec nie wywierał nacisku na ścianę? Kąt pomiędzy drabiną a podłożem $\varphi = 60°$.

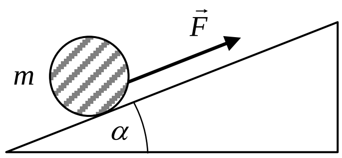
5.77. Strażak o masie $M = 75\,\mathrm{kg}$ ma wejść na drabinę o masie $m = 45\,\mathrm{kg}$ i długości $l = 12\,\mathrm{m}$, której wierzchołek znajduje się $h = 9{,}3\,\mathrm{m}$ nad ziemią, a środek masy jest w 1/3 jej długości od podstawy. Jak daleko może wejść bezpiecznie strażak na drabinę, jeżeli współczynnik tarcia pomiędzy podłożem i drabiną $\mu = 0{,}53$? Ile musiałby wynosić współczynnik tarcia, aby drabina nie osunęła się po wejściu strażaka na jej szczyt?

5.78. Na gładkiej, pionowej ścianie, na sznurze o długości $l = 1\,\mathrm{m}$, zawieszona jest metalowa kula o promieniu $r = 5\,\mathrm{cm}$. Jaki nacisk kula wywiera na ścianę oraz jakie jest naprężenie sznura? Gęstość stali wynosi $\rho = 7700\ \mathrm{kg/m^3}$.

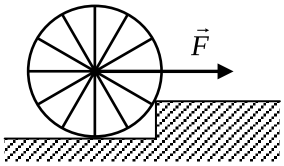


5.79. Na ścianie, na sznurze o długości $l = 1\,\text{m}$, zawieszona jest metalowa kula o promieniu $r = 5\,\text{cm}$. Jaka jest wartość współczynnika tarcia pomiędzy ścianą i kulą, jeżeli punkt zaczepienia kuli do sznura znajduje się dokładnie ponad jej środkiem? Gęstość stali wynosi $\rho = 7700\ \text{kg/m}^3$.

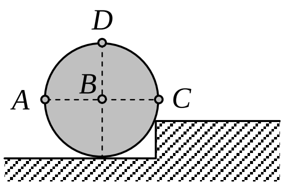
5.80. Pusta beczka o masie $m = 10\,\text{kg}$ i promieniu $r = 0{,}5\,\text{m}$ wciągana jest ruchem jednostajnym na równię o kącie nachylenia $\varphi = 30°$ przy pomocy przywiązanej do niej linki. Na jakiej wysokości nad równią znajduje się linka, jeżeli jest do niej równoległa? Współczynnik tarcia pomiędzy beczką, a równią $\mu = 0{,}5$.



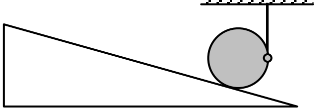
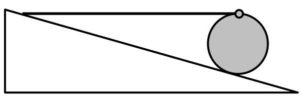
5.81. Z jaką poziomą siłą siłą należy działać na oś koła o promieniu r i masie m, aby wciągnąć je na stopień o wysokości h? W jakich granicach musi zawierać się h w stosunku do r, aby było to możliwe?



5.82. Walec o masie $m = 100\,\text{kg}$ i promieniu $r = 20\,\text{cm}$ trzeba wciągnąć na stopień o wysokości $h = 10\,\text{cm}$. Jaką minimalną, zorientowaną poziomo siłę należy przyłożyć do walca, aby go unieść? Zadanie rozwiązać dla czterech różnych punktów zaczepienia tej siły: A, B, C oraz D. Pod jakim kątem należy przyłożyć siłę w punkcie B, aby unieść walec z jak najmniejszą siłą? Jaka jest wartość tej siły?



5.83. W sytuacjach przedstawionych na rysunkach, znajdująca się na równi beczka utrzymywana jest w stanie równowagi za pomocą przywiązanego do niej sznura. Ile wynosi minimalna wartość współczynnika tarcia pomiędzy beczką, a podłożem, aby mogła ona znajdować się w stanie równowagi? Nachylenie równi $\varphi = 30°$.

(*a*)  (*b*) 

5.84. Na równię nachyloną do poziomu pod kątem α położono skrzynkę o masie $m = 0.5\,\text{kg}$, wysokości $h = 30\,\text{cm}$, długości $d = 15\,\text{cm}$ i szerokości $l = 5\,\text{cm}$. Współczynnik tarcia pomiędzy skrzynią i podłożem $\mu = 0{,}3$. Opisać zachowanie się skrzyni w zależności od kąta α.

5.85. Na szczycie sferycznej czaszy o promieniu r spoczywa jednorodny sześcian o boku a. Co się stanie, jeśli sześcian wychylimy z tego położenia o mały kąt φ? Współczynnik tarcia pomiędzy czaszą, a sześcianem jest na tyle duży, że przeciwdziała zsuwaniu się sześcianu.