4. Pęd, moment pędu, energia mechaniczna

Zasada zachowania pędu

Jeżeli wypadkowa siła $\vec{F}$ działająca na układ n punktów materialnych jest równa zeru, to całkowity pęd układu $\vec{P}$ pozostaje wielkością stałą:

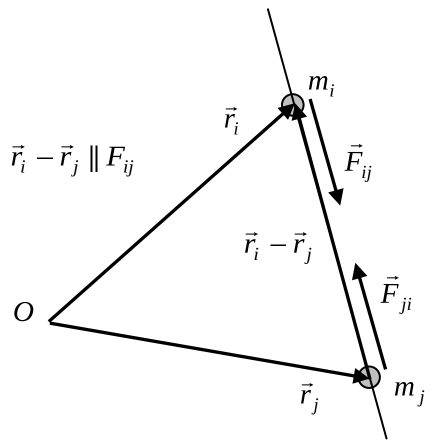
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}. \tag{4.1}$$

W zapisie tym $\vec{F}_i$ jest całkowitą siłą działającą na punkt o masie m_i, prędkości $\vec{v}_i$ i pędzie $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Wypadkowa siła $\vec{F}$ równa jest sumie sił zewnętrznych $\vec{F}_{i0}$, ponieważ siły wzajemnego oddziaływania znoszą się na mocy trzeciej zasady dynamiki. Zasada zachowania pędu obowiązuje zatem w układzie izolowanym, tj. w układzie, w którym nie ma oddziaływań zewnętrznych oraz w układzie, w którym oddziaływania zewnętrzne istnieją, ale się równoważą. Gdy $\vec{F} \neq 0$, zasada zachowania pędu może obowiązywać selektywnie - na wybranym kierunku, pod warunkiem, że na tym kierunku działające siły się znoszą lub nie występują. Wektorowa postać zasady zachowania pędu równoważna jest trzem zapisom skalarnym:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} p_{ix} = \text{const}, \quad P_y = \sum_{i=1}^{n} p_{iy} = \text{const}, \quad P_z = \sum_{i=1}^{n} p_{iz} = \text{const}. \tag{4.2}$$

Równania (4.1), (4.2) obowiązują również dla ciał o skończonych rozmiarach, jeżeli pędy punktów materialnych zastąpimy pędami środków mas tych ciał.

Zasada zachowania momentu pędu



Rys. 4.1. Ilustracja sił centralnych

Jeżeli wypadkowy moment sił $\vec{M}$ działający na układ swobodnych punktów materialnych jest równy zeru, to całkowity moment pędu (kręt) $\vec{L}$ tego układu jest wielkością stałą:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}, \tag{4.3}$$

gdzie $\vec{M}_i$ oraz $\vec{L}_i$ jest momentem siły i momentem pędu *i*-tego punktu:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \qquad \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i . \tag{4.4}$$

Moment pędu układu swobodnych punktów materialnych pozostaje wielkością stałą, jeżeli spełnione są dwa warunki:

- układ jest izolowany, tj. $\vec{F}_{i0} = 0$ dla każdego i,
- siły wzajemnego oddziaływania $\vec{F}_{ij}$ są siłami centralnymi, czyli takimi siłami, których kierunek działania pokrywa się z kierunkiem prostej przechodzącej przez obydwa punkty i oraz j (Rys. 4.1.).

Przykładem sił centralnych są siły wynikające z *prawa powszechnego ciążenia* lub *prawa Coulomba.*

Zasada zachowania energii mechanicznej

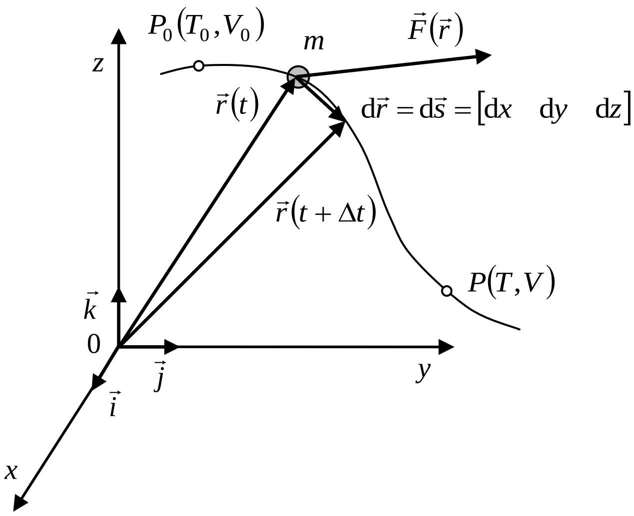
Praca L wykonana przez wypadkową siłę $\vec{F}_w$ przemieszczającą punkt materialny wzdłuż drogi między dwoma punktami P_0 i P trajektorii równa jest zmianie energii kinetycznej tego punktu:

$$L = \int\limits_{P_0 \to P} \vec{F}_w \cdot \mathrm{d}\vec{s} = T - T_0 , \tag{4.5}$$

gdzie

$$T = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{4.6}$$

jest energią kinetyczną punktu.



Rys. 4.2. Ilustracja do zasady zachowania energii mechanicznej

Jeżeli dla określonej siły $\vec{F}(\vec{r})$ istnieje jednoznaczna funkcja położenia $V = V(\vec{r})$ spełniająca warunek:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}V(\vec{r}) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial z}\right], \tag{4.7}$$

to siłę $\vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{F}_c(\vec{r})$ nazywamy siłą zachowawczą lub konserwatywną, a $V(\vec{r})$ jest energią potencjalną punktu w położeniu $\vec{r}$ w polu siły $\vec{F}_c(\vec{r})$. Praca siły konserwatywnej przemieszczającej obiekt między punktami P_0 i P nie zależy od kształtu trajektorii, a różnicę energii potencjalnej odniesioną do obydwu punktów wyraża wzór:

$$\Delta V = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{P_0 \to P} \vec{F}_c \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,. \tag{4.8}$$

W polu sił konserwatywnych energia potencjalna określona jest z dokładnością do stałej $V(\vec{r}_0)$, którą dla zdefiniowanego położenia $\vec{r}_0$ przyjmujemy zwykle, jako równą zeru. Energią potencjalną w punkcie P jest wówczas pracą, którą wykonuje pole konserwatywne przemieszczając punkt materialny po dowolnej drodze z położenia P do położenia P_0. W polu siły konserwatywnej całkowita energia mechaniczna układu, równa sumie energii kinetycznej i energii potencjalnej punktu w polu tej siły, jest w dowolnym miejscu trajektorii stała:

$$E = T + V = \mathrm{const}\,. \tag{4.9}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by siła była zachowawcza, jest zerowanie się wektora $\mathrm{rot}\vec{F}$:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}\,. \tag{4.10}$$

Przykładem sił zachowawczych są siły grawitacji oraz siły sprężyste. Zasada zachowania energii mechanicznej wyrażona równaniem (4.9) obowiązuje również w odniesieniu do układu punktów materialnych, jeżeli przez T i V wyrazimy odpowiednio sumę energii kinetycznych i potencjalnych wszystkich punktów układu.

Siły niezachowawcze lub niekonserwatywne, to takie siły, których praca zależy od kształtu drogi, po której przemieszczane jest ciało. Przykładem sił niezachowawczych są siły tarcia oraz siły oporu. Praca sił niekonserwatywnych ulega dyssypacji (rozproszeniu), a całkowita energia mechaniczna izolowanego układu maleje.

Zachowanie całkowitej energii

W ogólnym przypadku, poza siłami konserwatywnymi na układ mogą dodatkowo działać siły zewnętrzne oraz siły niezachowawcze w postaci sił tarcia i oporów. Wypadkowa siła działająca na układ przyjmie wówczas postać:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_z + \vec{F}_t\,, \tag{4.11}$$

gdzie $\vec{F}_c, \vec{F}_z$ *i* $\vec{F}_t$ oznacza odpowiednio wypadkową siłę konserwatywną, wypadkową siłę zewnętrzną i wypadkową siłę tarcia i oporów. Korzystając z uniwersalnego zapisu (4.5) oraz równania (4.8) - prawdziwego tylko dla sił konserwatywnych, znajdziemy całkowitą pracę L_z wykonaną nad układem przez siły zewnętrzne:

$$L_z = \int\limits_{P_0 \to P} \vec{F}_z \mathrm{d}\vec{s} = \Delta T + \Delta V + \Delta U\,, \qquad (4.12)$$

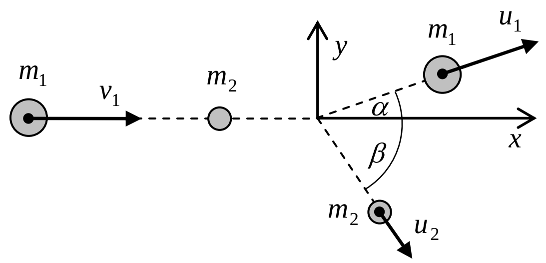
gdzie $\Delta T = T - T_0$ oraz $\Delta V = V - V_0$ oznaczają całkowitą zmianę odpowiednio energii kinetycznej i potencjalnej układu, natomiast ΔU jest zmianą energii wewnętrznej tego układu:

$$\Delta U = U - U_0 = -\int\limits_{P_0 \to P} \vec{F}_t \mathrm{d}\vec{s}\,. \qquad (4.13)$$

Zmiana energii wewnętrznej, równoważna pracy sił tarcia i oporów, nie jest ujęta w zmianie energii mechanicznej układu. Pracę tą w całości znajdujemy w postaci energii rozproszonej w układzie.

Przykłady

Przykład 4.1. Kula o masie $m_1 = 0{,}5\mathrm{kg}$, poruszająca się z prędkością $v_1 = 3\mathrm{m/s}$, zderza się sprężyście ze spoczywającą kulą o masie $m_2 = 0{,}3\mathrm{kg}$. Po zderzeniu kula o masie m_2 porusza się pod kątem $\beta = 65^\circ$ względem pierwotnego kierunku przemieszczania się kuli o masie m_1. Znaleźć prędkości u_1 i u_2 obydwu kul po zderzeniu oraz kąt α, o który odchyli się trajektoria kuli o masie m_1.



Rozwiązanie:

Zderzenia kul są sprężyste, więc energia kinetyczna układu przed zderzeniem kul jest taka sama jak po zderzeniu:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\,.$$

Ponieważ nie ma oddziaływań zewnętrznych, więc sumaryczny pęd układu przed zderzeniem i po zderzeniu także pozostaje stały. Zasada zachowania pędu (4.2) odniesiona do kierunków x i y przyjmie odpowiednio postać:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta\,, \\ 0 = m_1 u_1 \sin\alpha - m_2 u_2 \sin\beta\,. \end{cases}$$

Wprowadzając parametr $\kappa = m_2 / m_1$, otrzymamy układ trzech równań z trzema poszukiwanymi wielkościami u_1, u_2, α:

$$\begin{cases} u_1^2 = v_1^2 - \kappa u_2^2 \,, \\ u_1 \cos\alpha = v_1 - \kappa u_2 \cos\beta \,, \\ u_1 \sin\alpha = \kappa u_2 \sin\beta \;. \end{cases}$$

Pierwsze z równań pozostawiamy bez zmian. Pozostałe dwa równania podnosimy stronami do kwadratu i dodajemy otrzymując w wyniku układ dwóch równań postaci:

$$\begin{cases} u_1^2 = v_1^2 - \kappa u_2^2 \,, \\ u_1^2 = v_1^2 - 2\kappa v_1 u_2 \cos\beta + \kappa^2 u_2^2 \;. \end{cases}$$

Odejmując otrzymane równania stronami, znajdujemy równanie, którego rozwiązaniem jest poszukiwana wartość u_2:

$$u_2 = \frac{2v_1 \cos\beta}{1+\kappa} \,.$$

Znajomość u_2 pozwala już w prosty sposób obliczyć dwie pozostałe niewiadome:

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 - \kappa u_2^2} = \frac{\sqrt{(1+\kappa)^2 - 4\kappa\cos^2\beta}}{1+\kappa} v_1 \,,$$

$$\sin\alpha = \kappa \frac{u_2}{u_1} \sin\beta = \frac{\kappa \sin(2\beta)}{\sqrt{(1+\kappa)^2 - 4\kappa\cos^2\beta}} \,.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy: $u_1 = 2{,}73\ \mathrm{m/s}$, $u_2 = 1{,}58\ \mathrm{m/s}$, $\alpha = 18{,}35°$.

Przykład 4.2. Na punkt materialny o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ działa siła $\vec{F} = [1 \quad 2 \quad -3]\,\mathrm{N}$. W momencie $t_0 = 5\,\mathrm{s}$ położenie punktu oraz jego prędkość określone były odpowiednio przez wektory $\vec{r}_0 = [1 \quad -2 \quad 4]\,\mathrm{m}$ oraz $\vec{v}_0 = [-1 \quad 2 \quad 4]\,\mathrm{m/s}$. Obliczyć moment siły $\vec{M}$ oraz moment pędu $\vec{L}$ punktu względem początku układu współrzędnych w momencie $t = 20\,\mathrm{s}$. Sprawdzić, że dla rozważanego przypadku spełniona jest druga zasada dynamiki zapisana w postaci: $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{M}$.

Rozwiązanie:

Punkt porusza się pod wpływem stałej siły, więc jego prędkość oraz położenie opisują odpowiednio równania (2.11) oraz (2.12):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0), \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \,,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \,.$$

Zgodnie z definicją momentu siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \right) \times m\vec{a} = \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)\right) \times m\vec{a} \,.$$

Po podstawieniu danych liczbowych znajdziemy zależność momentu siły od czasu:

$$\vec{M}(t)=\left([1\quad -2\quad 4]+[-1\quad 2\quad 4](t-5)\right)\times[1\quad 2\quad -3]=$$
$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t+6 & 2t-12 & 4t-16 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=[-14t+68\quad t+2\quad -4t+24]\ \mathrm{Nm}.$$

Dla $t=20\mathrm{s}$, $\vec{M}(20)=[-212\quad 22\quad -56]\ \mathrm{Nm}$, $\left|\vec{M}(20)\right|\approx 220\mathrm{Nm}$.

Moment pędu definiuje iloczyn:

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\left(\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2\right)\times m\left(\vec{v}_0+\vec{a}(t-t_0)\right)=$$
$$=m(\vec{r}_0\times\vec{v}_0)+m(t-t_0)(\vec{r}_0\times\vec{a})+\frac{1}{2}m(t-t_0)^2(\vec{v}_0\times\vec{a}).$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy:

$$\vec{L}(t)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}+(t-5)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}(t-5)^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=$$
$$=\left[-7t^2+68t-181\quad \frac{1}{2}t^2+2t-30\frac{1}{2}\quad -2t^2+24t-70\right]\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Dla $t=20\mathrm{s}$, $\vec{L}(20)=\left[-1621\quad 569\frac{1}{2}\quad -390\right]\ \mathrm{kg\,m^2/s}$, $\left|\vec{L}(20)\right|\approx 1762\ \mathrm{kg\,m^2/s}$.

Obliczając pochodną momentu pędu po czasie znajdziemy:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-7t^2+68t-181\quad \frac{1}{2}t^2+2t-30\frac{1}{2}\quad -2t^2+24t-70\right]=$$

$$=[-14t+68\quad t+2\quad -4t+24]=\vec{M}(t).$$

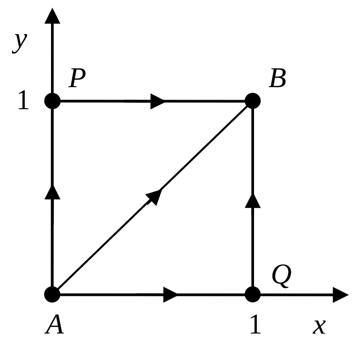
W rozważanym przypadku spełniona jest więc druga zasada dynamiki zapisana w postaci: $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t=\vec{M}$. Oczywiście identyczny rezultat otrzymamy dokonując różniczkowania na symbolach ogólnych:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(\vec{r}_0\times\vec{v}_0)+m(t-t_0)(\vec{r}_0\times\vec{a})+\frac{1}{2}m(t-t_0)^2(\vec{v}_0\times\vec{a})\right)=$$
$$=\left(\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)\right)\times m\vec{a}=\vec{M}(t).$$

Przykład 4.3. Dane jest pole sił: $\vec{F}_1=[y\quad x]\,\mathrm{N}$. Obliczyć pracę sił tego pola przy przemieszczeniu cząstki z położenia $A[0\quad 0]$ do położenia $B[1\quad 1]$ po trzech różnych drogach:

a) wzdłuż prostej $y=x$,
b) po drodze $x=0$ do punktu $P[0\quad 1]$ i dalej po drodze $y=1$,
c) po drodze $y=0$ do punktu $Q[1\quad 0]$ i dalej po drodze $x=1$.

Współrzędne punktów wyrażone są w metrach.



Rozwiązać również zadanie dla siły $\vec{F}_2 = [-y \quad x]\mathrm{N}$. Która z obydwu sił jest siłą zachowawczą?

Rozwiązanie:

Pracę siły $\vec{F} = [F_x \quad F_y]$ na drodze od położenia A do B wyraża relacja:

$$L = \int\limits_{A \to B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{A \to B} [F_x \quad F_y] \cdot [\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y] = \int\limits_{\{X\}} F_x \mathrm{d}x + \int\limits_{\{Y\}} F_y \mathrm{d}y$$

gdzie $\{X\}$ i $\{Y\}$ oznaczają odpowiednio obszary zmienności wartości x i y. Na poszczególnych odcinkach siła $\vec{F}_1 = [y \quad x]$ wykonuje pracę:

a) na drodze $A \to B$: $L_{A \to B} = \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 y\mathrm{d}y = 1\,\mathrm{J}$, ($F_x = y = x$, $F_y = x = y$),

b) na drodze $A \to P$: $L_{A \to P} = 0\,\mathrm{J}$, ($F_x = y, dx = 0, F_y = x = 0$),

na drodze $P \to B$: $L_{P \to B} = \int\limits_0^1 1\mathrm{d}x = 1\,\mathrm{J}$, ($F_x = y = 1, F_y = x, dy = 0$).

Sumaryczna praca $L_{A \to P \to B} = 1\,\mathrm{J}$.

c) na drodze $A \to Q$: $L_{A \to Q} = 0\,\mathrm{J}$, ($F_x = y = 0$, $F_y = x, dy = 0$),

na drodze $Q \to B$: $L_{Q \to B} = \int\limits_0^1 1\mathrm{d}y = 1\,\mathrm{J}$, ($F_x = y, dx = 0, F_y = x = 1$),

Sumaryczna praca $L_{A \to Q \to B} = 1\,\mathrm{J}$.

Na każdej z trzech dróg praca wykonana przez siłę $\vec{F}_1 = [y \quad x]$ jest taka sama i wynosi 1J. Aby się upewnić, że siła $\vec{F}_1 = [y \quad x]$ jest konserwatywna, należy stwierdzić czy spełniony jest warunek $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial y}{\partial z} \quad \frac{\partial x}{\partial z} \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right] = \vec{0}.$$

Siła $\vec{F}_1 = [y \quad x]$ jest więc siłą konserwatywną. Nietrudno odgadnąć, że energia potencjalna odpowiadająca tej sile ma postać:

$$V(x, y) = -xy.$$

Istotnie, funkcja ta spełnia warunek (4.7):

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}V(x,y) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \end{bmatrix} = \vec{F}_1 .$$

Dokonując podobnych obliczeń dla siły $\vec{F}_2 = [-y \quad x]$, znajdziemy:

a) na drodze $A \to B$: praca $L_{A \to B} = 0\,\mathrm{J}$,
b) na drodze $A \to P \to B$: praca $L_{A \to P \to B} = -1\,\mathrm{J}$,
c) na drodze $A \to Q \to B$: praca $L_{A \to Q \to B} = 1\,\mathrm{J}$.

Praca siły $\vec{F}_2 = [-y \quad x]$ zależy od drogi, zatem siła ta nie jest siłą konserwatywną.

Zadania

4.1. Kula o masie $m = 15\,\mathrm{g}$ opuszcza z prędkością $v = 800\,\mathrm{m/s}$ lufę strzelby o długości $l = 75\,\mathrm{cm}$. Jaka jest średnia siła działająca na kulę w lufie?

4.2. Neutron o masie m_0 zderza się z atomem węgla o masie $m = 12\,m_0$. Rozpatrując zderzenie, jako centralne i sprężyste obliczyć, ile razy po zderzeniu zmaleje energia kinetyczna neutronu.

4.3. Naprzeciwko siebie poruszają się dwa ciała o masach: $m_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$. Prędkość ciała o masie m_1 wynosi $v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$. Jaką prędkość ma ciało o masie m_2, jeżeli po niesprężystym zderzeniu powstała masa przestała się przemieszczać?

4.4. Wagon kolejowy o masie $m_1 = 22\,\mathrm{t}$ porusza się z prędkością $v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$ i zderza się z drugim wagonem o masie $m_2 = 30\,\mathrm{t}$. Obliczyć prędkości obydwu wagonów po zderzeniu w przypadku, gdy:

a) drugi wagon poruszał się z prędkością $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$ w kierunku przeciwnym do ruchu pierwszego wagonu, a po zderzeniu obydwa wagony zostały automatycznie połączone hakiem,
b) drugi wagon stał nieruchomo i zderzenie było sprężyste,
c) drugi wagon poruszał z prędkością $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$ w kierunku zgodnym z ruchem pierwszego wagonu i zderzenie było sprężyste.

Tarcia i opory pominąć.

4.5. Poruszająca się z prędkością v_0 kula dogania i zderza się centralnie z kulą o trzykrotnie mniejszej masie i dwukrotnie mniejszej prędkości. Wyznaczyć:

a) prędkości kul po zderzeniu sprężystym,
b) prędkości kul po zderzeniu niesprężystym,
c) ubytek energii podczas zderzenia niesprężystego.

4.6. Na poruszający się z prędkością $v = 15\,\mathrm{km/h}$ wózek o masie $M = 120\,\mathrm{kg}$ spada worek cementu o masie $m = 25\,\mathrm{kg}$. Obliczyć prędkość wózka z cementem w trzech przypadkach:

a) worek spada swobodnie na wózek,
b) worek rzucono pod kątem $\varphi = 20°$ w stosunku do pionu w kierunku ruchu wózka,
c) worek rzucono pod kątem $\varphi = 20°$ w stosunku do pionu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wózka.

4.7. W równię pochyłą o masie $m_1 = 0{,}28\,\mathrm{kg}$ uderza kula o masie $m_2 = 0{,}12\,\mathrm{kg}$ i odbija się pionowo do góry. Na jaką wysokość h wzniesie się kula, jeżeli równia odskakuje z prędkością $v = 1{,}25\,\mathrm{m/s}$. Zderzenie jest sprężyste, a tarcie między równią a płaszczyzną nie występuje.

4.8. Na gładkiej, poziomej powierzchni spoczywa równia pochyła o masie $m_1 = 28\,\mathrm{g}$. Z wysokości $h = 1{,}21\,\mathrm{m}$ na równię spada stalowa kulka o masie $m_2 = 14\,\mathrm{g}$ i odskakuje w kierunku poziomym. Obliczyć prędkość, z jaką będzie poruszała się po zderzeniu równia, jeżeli zderzenie jest sprężyste, a tarcie między równią a płaszczyzną nie występuje.

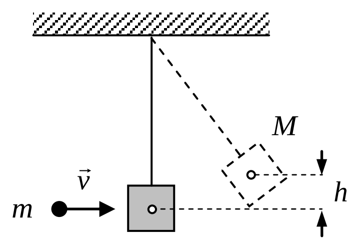
4.9. Pocisk zostaje wystrzelony z prędkością początkową $v = 30\,\mathrm{m/s}$ pod kątem $\alpha = 45°$. W najwyższym punkcie trajektorii pocisk rozpada się na dwie części o jednakowych masach. Jedna z tych części ma w momencie rozpadu prędkość równą zeru i spada swobodnie na ziemię. Jak daleko od działa spadnie druga część pocisku?

4.10. Na gładkiej, poziomej powierzchni, w pewnej odległości od pionowej ściany spoczywa kulka o masie m_1. Druga kulka o masie m_2 porusza się od ściany w stronę pierwszej kulki. Następuje centralne i sprężyste zderzenie. Przy jakim stosunku mas m_1 / m_2 druga kulka doleci do ściany, odbije się od niej sprężyście i dogoni pierwszą kulkę?

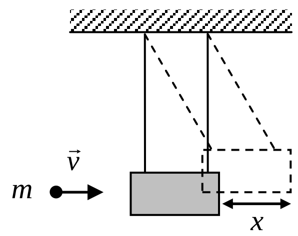
4.11. Pocisk o masie $m = 5\,\mathrm{g}$, poruszający się z prędkością $v_1 = 800\,\mathrm{m/s}$, przebija deskę grubości $d = 2\,\mathrm{cm}$ i leci dalej z prędkością $v_2 = 600\,\mathrm{m/s}$. Oblicz średnią wartość siły oporu działającej na pocisk podczas przebijania deski.

4.12. Przez spoczywający na poziomej powierzchni klocek o masie $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ przelatuje pocisk o masie $m_2 = 15\,\mathrm{g}$. Prędkość pocisku przed klockiem i tuż po wyjściu z niego wynosi odpowiednio $v_1 = 500\,\mathrm{m/s}$ i $v_2 = 300\,\mathrm{m/s}$. Jaki dystans pokona klocek, jeżeli współczynnik tarcia klocka o podłoże $\mu = 0{,}05$?

4.13. Na cienkiej, nieważkiej lince podwieszony jest drewniany klocek o masie $M = 15\,\mathrm{kg}$. W klocek ten, z prędkością $v = 150\,\mathrm{m/s}$, uderza poziomo pocisk o masie $m = 100\,\mathrm{g}$ i grzęźnie w nim. Obliczyć maksymalną prędkość układu klocek - pocisk oraz wysokość h, na jaką wzniesie się klocek w stosunku do położenia równowagi.



4.14. Wahadło balistyczne. W skrzynkę z piaskiem o masie $M = 3\,\mathrm{kg}$ uderza pocisk o masie $m = 10\,\mathrm{g}$ i grzęźnie w niej. Jaka była prędkość pocisku v przed zderzeniem, prędkość skrzynki z pociskiem v_1 tuż po zderzeniu oraz jaka część energii została rozproszona w czasie zderzenia, jeżeli skrzynka zawieszona na linkach o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ przesunęła się w poziomie o $x = 25\,\mathrm{cm}$?



4.15. Lecąc poziomo pocisk o masie $m = 20\,\mathrm{g}$ przebija drewniany klocek zawieszony na lince o długości $l = 50\,\mathrm{cm}$. Na skutek tego linka z klockiem odchyliła się o kąt $\varphi = 60^{\circ}$, a prędkość pocisku zmalała z $v_1 = 300\,\mathrm{m/s}$ do $v_2 = 190\,\mathrm{m/s}$. Jaka jest masa klocka i jaka część energii kinetycznej pocisku zamieniła się w ciepło?

4.16. Dwie identyczne, plastelinowe kulki wiszą na niciach o jednakowych długościach $l = 60\,\mathrm{cm}$ zawieszonych w jednym punkcie statywu. Przy naciągniętej nici, jedną z kul odchylono do poziomu i puszczono swobodnie doprowadzając do centralnego, doskonale niesprężystego zderzenia z drugą kulą. Jaka część energii kuli ulegnie rozproszeniu w trakcie zderzenia z kulą nieruchomą?

4.17. Na niciach o jednakowych długościach wiszą dwie kule. Przy naciągniętej nici, mniejszą kulę odchylono do poziomu i puszczono swobodnie doprowadzając do centralnego, sprężystego zderzenia z drugą kulą. Po zderzeniu mniejsza kula odchyliła się o kąt 2α, a cięższa o kąt α. Znaleźć masę mniejszej kuli m, jeżeli masa większej kuli była równa M.

4.18. Dwie jednakowe kule o masach $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ zamocowano na niciach o długościach $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ i $l_2 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Kulę na nici o długości l_1 odchylono o kąt $\alpha = 5^{\circ}$ i puszczono swobodnie.

a) O jaki kąt odchyli się druga kula, jeśli zderzenia pomiędzy kulami są centralne i sprężyste?
b) Po jakim czasie nastąpi $n = 4$ zderzenie pomiędzy kulami?

4.19. Dwie kulki o masie $m = 10\,\mathrm{g}$ każda rzucono w górę z tego samego miejsca, z jednakowymi prędkościami $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$, w odstępie czasu $t = 1\,\mathrm{s}$. Znaleźć czas i miejsce zderzenia się kulek. Po jakim czasie kulki spadną na ziemię, jeżeli:

a) były z plasteliny i w chwili spotkania zlepiły się,
b) były ze stali i zderzenie było idealnie sprężyste?

4.20. Samochód o masie $m_1 = 2000\,\mathrm{kg}$ poruszający się z prędkością $v_1 = 80\,\mathrm{km/h}$ uderza od tyłu w samochód o masie $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$ poruszającego się z prędkością $v_2 = 40\,\mathrm{km/h}$. Ile ciepła zostało wydzielone w zderzeniu, jeżeli zderzenie było idealnie niesprężyste? Jaki był współczynnik tarcia, jeżeli samochody po zderzeniu przebyły drogę $s = 20\,\mathrm{m}$?

4.21. Samochód o masie m zderzył się centralnie z jadącą naprzeciw niego ciężarówką o masie M. Jaka jest prędkość obu pojazdów po zderzeniu oraz jaka energia została wydzielona w zderzeniu, jeżeli przed zderzeniem prędkość obydwu samochodów wynosiła v? Rozważyć przypadki:

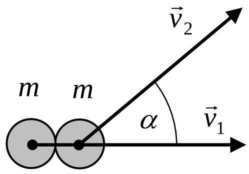
a) po zderzeniu samochody nie pozostają ze sobą w kontakcie (zderzenie sprężyste),
b) po zderzeniu samochody pozostają szczepione (zderzenie niesprężyste).

4.22. Strumień wody o prędkości $v = 10\,\mathrm{m/s}$ i przekroju $S = 5\,\mathrm{cm}^2$ uderza w ściankę pod kątem $\alpha = 45^{\circ}$ i sprężyście odbija się od niej z tą samą prędkością. Znaleźć siłę, jaką strumień wywiera na ściankę.

4.23. W spoczywającą kulę bilardową uderza sprężyście druga, identyczna kula bilardowa. Dowieść, że w przypadku zderzenia niecentralnego, trajektorie obydwu kul po zderzeniu zawsze będą tworzyły kąt prosty.

4.24. Kula o masie m, poruszająca się z prędkością v, zderza się sprężyście z kulą o takiej samej masie i prędkości, poruszającą się pod kątem $\alpha = 30^{\circ}$ do toru pierwszej kuli. O jaki kąt β odchyliła się pierwsza kula po zderzeniu, jeżeli druga kula odchyliła się o kąt $\gamma = 60^{\circ}$ w stosunku do kierunku ruchu pierwszej kuli przed zderzeniem?

4.25. Kulka o masie $m = 100\,\mathrm{g}$, poruszająca się z prędkością $v_1 = 30\,\mathrm{m/s}$, uderza centralnie w kulkę o takiej samej masie i i takiej samej wartości prędkości $v_2 = v_1$, poruszającą się pod kątem α względem jej kierunku ruchu. Jak zależą prędkości obydwu kulek po zderzeniu od kąta α, jeżeli zderzenie jest idealnie sprężyste? Rozważyć w szczególności przypadek $\alpha = 90°$ i $\alpha = 180°$.



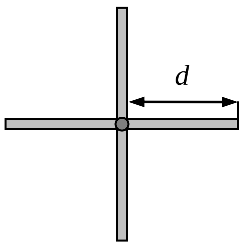
4.26. Dwie kulki poruszają się w płaszczyźnie xy z prędkościami $\vec{v}_1 = v(\vec{i} + \vec{j})$ i $\vec{v}_2 = v(\vec{i} - \vec{j})$. Kulki zderzają się i zlepiają, a powstała masa przesuwa się w kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{a} = \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}$. Wyznaczyć masę m_2 kulki wiedząc, że masa pierwszej kulki wynosi m_1.

4.27. Obliczyć moment pędu punktu materialnego o masie $M = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ poruszającego się z częstotliwością $f = 30\,\mathrm{Hz}$ po okręgu o promieniu $R = 1\,\mathrm{m}$. Jak powinien obracać się drugi punkt o masie $m = 0{,}8\,\mathrm{kg}$ po współśrodkowym okręgu o promieniu $r = 0{,}7\,\mathrm{m}$, aby wypadkowy moment pędu układu był równy zeru?

4.28. Znaleźć moment pędu układu Ziemia – Księżyc względem
a) środka masy tego układu,
b) środka masy Ziemi,
c) środka masy Księżyca.

- Masa Ziemi: $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$,
- Masa Księżyca: $M_K \approx 7{,}3 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$,
- Średnia odległość od Księżyca do Ziemi: $d \approx 3{,}84 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$,
- Okres obiegu Księżyca $T = 2{,}36 \cdot 10^{6}\ \mathrm{s}$.

4.29. Korzystając z definicji momentu pędu obliczyć (względem osi obrotu wirnika) moment pędu dwupłatowego śmigła helikoptera o całkowitej rozpiętości każdego płata $2d$, gęstości liniowe płata λ i częstotliwości roboczej wirnika f.



4.30. Pocisk o masie m wystrzelono z armaty pod kątem α z prędkością początkową v_0. Znaleźć zależność momentu siły $\vec{M}$ i moment pędu $\vec{L}$ pocisku od czasu względem początku układu współrzędnych wyznaczonego przez położenie armaty. Sprawdzić, że dla tego przypadku spełniona jest druga zasada dynamiki zapisana w postaci: $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{M}$.

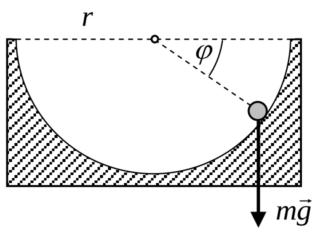
4.31. Student o masie $m = 75\,\mathrm{kg}$ wykonał $n = 100$ pompek, za każdym razem dźwigając i opuszczając swój środek masy o $s = 25\,\mathrm{cm}$. Jaką pracę wykonał on podczas tego ćwiczenia?

4.32. Słup telegraficzny długości $l = 8\,\text{m}$ ma ciężar $Q = 1500\,\text{N}$. Na szczycie słupa jest umocowana poprzeczka z izolatorami o dodatkowej masie $m = 30\,\text{kg}$. Jaką pracę trzeba wykonać, aby podnieść leżący słup do pozycji pionowej?

4.33. Jajko o masie $m = 50\,\text{g}$, wyrzucone pionowo do góry z prędkością $v_0 = 5\,\text{m/s}$, opadło na ziemię z prędkością $v_1 = 1\,\text{m/s}$. Jaką pracę wykonała siła oporu powietrza?

4.34. Kamień rzucony ukośnie z wysokości $h = 20\,\text{m}$ nad powierzchnią ziemi z prędkością $v_0 = 18\,\text{m/s}$, upadł na ziemię z prędkością $v_1 = 24\,\text{m/s}$. Jaka część energii mechanicznej ciała została zużyta na pokonanie oporów powietrza?

4.35. Wyprowadzić wzór wyrażający prędkość ciała zsuwającego się bez tarcia po łuku okręgu o promieniu r w zależności od chwilowego położenia kątowego φ.



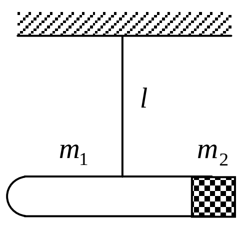
4.36. Obliczyć w kilowatach moc silnika, który mógłby za pomocą pompy o wydajności $\eta = 90\%$ wypompować $V = 5\,\text{m}^3$ wody na minutę z szybu o głębokości $h = 300\,\text{m}$.

4.37. Z jaką minimalną prędkością musi biec skoczek o tyczce, o masie $m = 75\,\text{kg}$, aby przeskoczyć poprzeczkę znajdującą się na wysokości $H = 6\,\text{m}$? Jaka jest wówczas jego energia kinetyczna? Założyć, że środek masy skoczka znajduje się na wysokości $h = 1\,\text{m}$.

4.38. Piłka została wykopnięta przez bramkarza z początkowa prędkością $v = 15\,\text{m/s}$, pod kątem $\alpha = 30°$. Jak wysoko i na jaką odległość doleci piłka? Jak była jej prędkość w najwyższym punkcie?

4.39. Koszykarz wykonuje rzuty osobiste z linii $x = 2{,}5\,\text{m}$ do kosza znajdującego się na wysokości $H = 3{,}05\,\text{m}$. Jaka jest minimalna wartość energii, jaką należy przekazać piłce o masie $m = 600\,\text{g}$, aby ta trafiła do kosza? Pod jakim kątem należy wyrzucić piłkę? Wyrzut piłki następuje na wysokości $h = 2\,\text{m}$.

4.40. Probówka o masie $m_1 = 30\,\text{g}$ zawieszona jest na nici długości $l = 30\,\text{cm}$ i zatkana korkiem o masie $m_2 = 2\,\text{g}$. Wewnątrz probówki znajduje się trochę prochu, który po ogrzaniu zapala się i na skutek wytworzonych gazów wyrzuca korek w kierunku poziomym. Obliczyć najmniejszą prędkość, z jaką korek musi wylecieć, aby probówka zatoczyła pełny okrąg w płaszczyźnie pionowej.

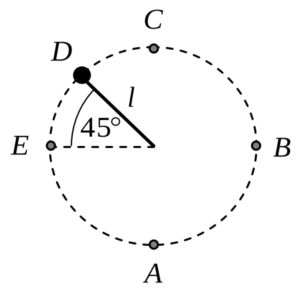


4.41. Na sznurku o długości $l = 45\,\mathrm{cm}$ wiruje w płaszczyźnie pionowej kamień. Obliczyć prędkość tego kamienia w najniższym i najwyższym punkcie toru wiedząc, że w najwyższym punkcie naprężenie sznurka jest równe zeru.

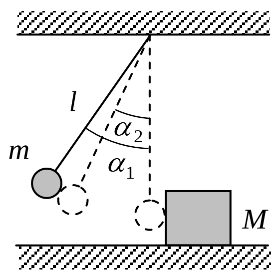
4.42. Jaką początkową prędkość należy nadać ciężarkowi o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ w najniższym położeniu, aby wykonał on pełen obrót, gdy:

a) ciężarek zawieszony jest na sztywnym, pozbawionym masy pręcie o długości $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$,

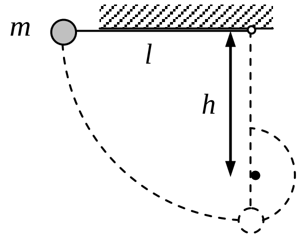
b) ciężarek zawieszony jest na nici o długości $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$? Jakie jest naprężenie nici w punktach A, B, C, D, E?



4.43. Kulka o masie $m = 100\,\mathrm{g}$ została odchylona o kąt $\alpha_1 = 35°$ i puszczona. Po odbiciu się od klocka o masie $M = 200\,\mathrm{g}$, kulka odchyliła się o kąt $\alpha_2 = 25°$. Jaka była prędkość klocka po zderzeniu oraz jaka część energii została rozproszona w zderzeniu? Długość nici $l = 1\,\mathrm{m}$.

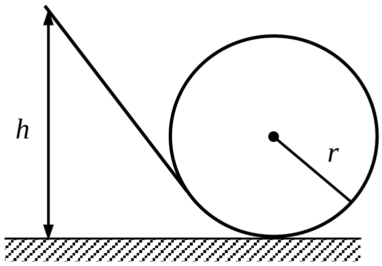


4.44. Na końcu nici o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ znajduje się kulka o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Nad kulką, w odległości $h = 0{,}75l$ od punktu zaczepienia nici, znajduje się wąski kołek. Nić odchylono do poziomu i puszczono. Jaka będzie prędkość kulki w najniższym położeniu? Jaka będzie jej prędkość w najwyższym punkcie trajektorii po owinięciu się nici wokół kółka?



4.45. Winda o masie $m = 750\,\mathrm{kg}$ wjeżdżając do góry porusza się przez pierwsze trzy sekundy ruchem jednostajnie przyspieszonym, uzyskując po tym czasie prędkość $v = 2\,\mathrm{m/s}$. Jaka jest średnia moc silnika windy w ciągu tych trzech pierwszych sekund? Ile wynosi moc silnika windy, gdy porusza się ona ze stałą prędkością?

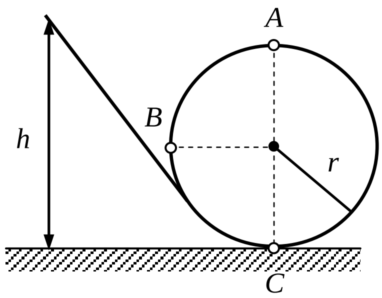
4.46. Jedną z atrakcji wesołego miasteczka jest „diabelska pętla” o promieniu $r = 5\,\mathrm{m}$. Jaka powinna być wysokość zjeżdżalni h, aby wagonik o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ mógł ją bezpiecznie pokonać (tj. bez oderwania się w jej najwyższym punkcie)?



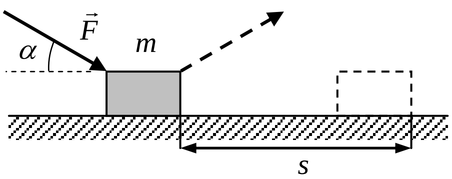
4.47. Ciało zsuwa się z „diabelskiej pętli” z wysokości dwa razy większej od wysokości minimalnej zapewniającej bezpieczne jej przebycie. Jakie są naciski tego ciała na pętlę w jej górnym i dolnym punkcie?

4.48. Z jakiej wysokości zjeżdża wagonik „diabelskiej pętli”, jeżeli w dolnym położeniu pętli pasażer jest wciskany w siedzenie siłą dziewięciokrotnie większą niż w położeniu górnym?

4.49. Wagonik o masie $m = 100\,\mathrm{kg}$ porusza się po „diabelskiej pętli” o promieniu $r = 5\,\mathrm{m}$. W górnym położeniu pętli jego energia kinetyczna jest równa energii potencjalnej. Obliczyć wysokość h, z jakiej zsunął się wagonik oraz nacisk, jaki wywiera wagonik na tor w zaznaczonych punktach.



4.50. Skrzynia o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ jest pchana po poziomej powierzchni ruchem jednostajnym. Jaką pracę wykonuje przyłożona siła przy przesunięciu skrzyni na odległość $s = 5\,\mathrm{m}$, jeżeli kąt pomiędzy siłą, a kierunkiem przesunięcia wynosi $\alpha = 30°$? Współczynnik tarcia pomiędzy skrzynią, a podłożem $\mu = 0{,}5$. Jak zmieni się wartość pracy, jeżeli ta sama siła F zacznie działać pod tym samym kątem, ale w górę?

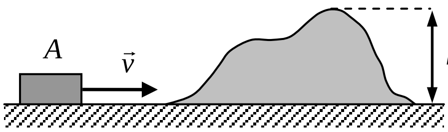


4.51. Jaką moc powinien mieć parowóz o masie $m = 30\,\mathrm{t}$, aby uzyskać prędkość $v = 5\,\mathrm{m/s}$ na torze wznoszącym się pod kątem $\alpha = 10°$ do poziomu, jeżeli współczynnik tarcia $\mu = 0{,}004$?

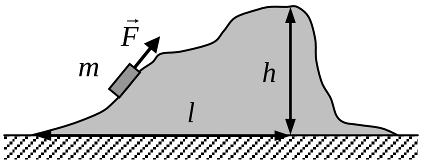
4.52. Spychacz wepchnął skrzynię o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ na pagórek o długości $l = 10\,\mathrm{m}$ i wysokości $h = 2\,\mathrm{m}$. Jaką pracę wykonał spychacz, jeżeli siła tarcia $F_t = 10\,\mathrm{N}$? Jaka będzie prędkość skrzyni, gdy zsunie się ona z pagórka?

4.53. Ciężarek o masie $m = 4\text{ kg}$ został pchnięty w górę równi o kącie nachylenia $\alpha = 30°$. Ile wynosi współczynnik tarcia pomiędzy ciężarkiem, a równią, jeżeli po nadaniu mu w dolnym położeniu prędkości $v = 6\text{ m/s}$ pokonuje on drogę $s = 1{,}5\text{ m}$?

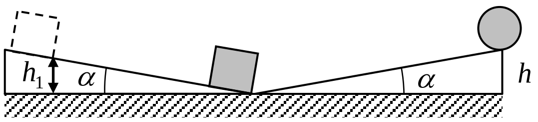
4.54. Na drodze ciała A poruszającego się po gładkiej, poziomej powierzchni znajduje się przeszkoda wysokości $h = 2\text{ cm}$. Przy jakiej najmniejszej prędkości ciało może przejechać przez przeszkodę, jeżeli jej masa jest $n = 5$ razy większa od masy ciała? Ciało A i przeszkoda mogą poruszać się bez tarcia. Założyć, że ciało A nie odrywa się od przeszkody.



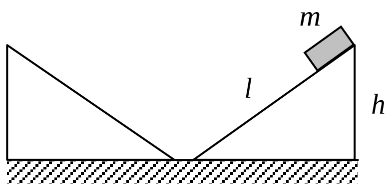
4.55. Ciało o masie m wciągnięto powoli na górkę, działając siłą $F = 25\text{ N}$, która w każdym punkcie była styczna do stoku górki. Znaleźć pracę tej siły, jeżeli wysokość górki $h = 7\text{ m}$, jej długość w kierunku poziomym $l = 30\text{ m}$, a współczynnik tarcia $\mu = 0{,}3$.



4.56. Walec o masie $m = 2\text{ kg}$ i promieniu $r = 25\text{ cm}$ stacza się z równi o wysokości $h = 2\text{ m}$ i kącie nachylenia $\alpha = 10°$. Na jaką wysokość h_1 zostanie wepchnięty sześcian o takiej samej masie jak walec, jeżeli w momencie zderzenia walec przekazał całą swoją energię sześcianowi? Współczynnik tarcia sześcianu o równię wynosi $\mu = 2$.



4.57. Skrzynia o masie $m = 50\text{ kg}$ zsuwa się z górki o wysokości $h = 3\text{ m}$ i długości $l = 5\text{ m}$. Współczynnik tarcia między skrzynią, a podłożem $\mu = 0{,}5$. Jaką prędkość osiągnie skrzynka u podnóża pagórka? Jak wysoko wjedzie ona na sąsiedni pagórek, jeśli jego kąt nachylenia jest taki sam jak pierwszego, lecz nie występuje na nim tarcie?



4.58. Sanki o $m = 50\text{ kg}$ zjeżdżają z zaśnieżonego pagórka o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ i wysokości $h = 10\text{ m}$. Jaką prędkość będą miały sanki po przebyciu drogi $s = 5\text{ m}$ na płaskim, zaśnieżonym odcinku po zjechaniu z pagórka? Współczynnik tarcia pomiędzy sankami i śniegiem na całej drodze wynosi $\mu = 0{,}5$.

4.59. Człowiek o masie $m = 75\text{ kg}$ zjeżdża na sankach z pagórka o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ i wysokości $h = 20\text{ m}$. Jaką drogę przebędzie on na sankach na płaskim odcinku po zjechaniu z pagórka, jeśli współczynnik tarcia pomiędzy sankami i śniegiem na całej drodze wynosi $\mu = 0{,}5$?

4.60. Lekki samolot o masie $m = 1000\ \mathrm{kg}$, celem wzbicia się w powietrze, powinien osiągnąć prędkość $v = 80\ \mathrm{km/h}$. Jaka powinna być minimalna moc silnika tego samolotu, aby mógł on bezpiecznie wystartować z lotniska o długości pasa startowego $s = 100\ \mathrm{m}$? Współczynnik tarcia podczas rozbiegu samolotu wynosi $\mu = 0{,}2$.

4.61. Samochód o masie $m = 750\ \mathrm{kg}$, poruszający się z prędkością $v_0 = 25\ \mathrm{km/h}$, po uderzeniu w przeszkodę zatrzymał się na drodze $d = 10\ \mathrm{cm}$ poruszając się w tym czasie ruchem jednostajnie opóźnionym. Obliczyć:

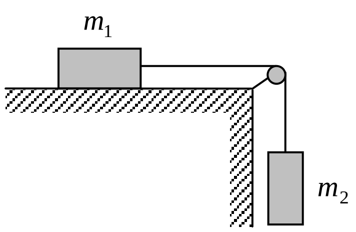
a) wartość przyspieszenia,
b) czas jaki upłynął do chwili zatrzymania się,
c) siłę działającą na samochód,
d) siłę działająca na pasażera o masie $m_p = 75\ \mathrm{kg}$,
e) energię wydzieloną w trakcie zderzenia,
f) moc zderzenia.

Obliczenia przeprowadzić również dla samochodu o masie $m = 1500\ \mathrm{kg}$ i prędkości $v_0 = 100\ \mathrm{km/h}$. Porównać wyniki obliczeń.

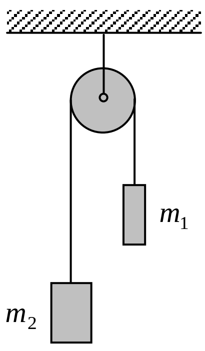
4.62. Drewnianą kulkę o promieniu r i gęstości ρ zanurzono w cieczy o gęstości $\rho_1 > \rho$ na głębokość $h > 2r$ i puszczono swobodnie. Obliczyć ile ciepła zostało przekazane cieczy, jeżeli kulka wyskoczyła na wysokość h_1 ponad powierzchnię cieczy.

4.63. Drewnianą kulkę o promieniu r i gęstości ρ znajdującą się na wysokości h ponad powierzchnią cieczy o gęstości $\rho_1 > \rho$ swobodnie puszczono. Jak głęboko zanurzy się kulka w cieczy? Tarcie pominąć.

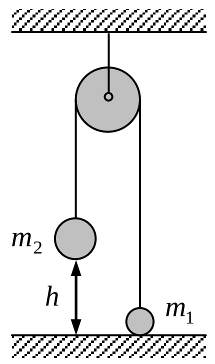
4.64. Z jaką prędkością będą poruszały się ciężarki o masach $m_1 = 1\ \mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\ \mathrm{kg}$, gdy przebędą drogę $s = 20\ \mathrm{cm}$? Współczynnik tarcia o ściankę skrzyni $\mu = 0{,}1$. Masa bloczka i nici jest do zaniedbania.



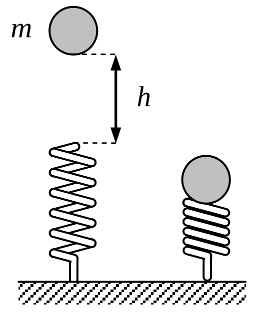
4.65. Jaką prędkość uzyskają ciężarki o masie $m_1 = 2\ \mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\ \mathrm{kg}$, jeżeli w chwili początkowej oba ciężarki były na tym samym poziomie, a na końcu oddaliły się od siebie o $h = 3\ \mathrm{m}$? Masa bloczka i nici jest do zaniedbania.



4.66. Dwa ciężarki o masach $m_1 = 5\,\text{kg}$ i $m_2 = 8\,\text{kg}$ są połączone nieważką nicią przewieszoną przez nieważki bloczek podwieszony do sufitu. Ciężarek pierwszy opuszczono tak, że początkowo dotykał podłogi, a następnie go puszczono. Na jaką maksymalną wysokość wzniosą się oba ciężarki po uderzeniu drugiego o ziemię, jeśli drugi ciężarek był początkowo na wysokości $h = 0{,}5\,\text{m}$, a przy zderzeniu z ziemią stracił 50% swojej energii?

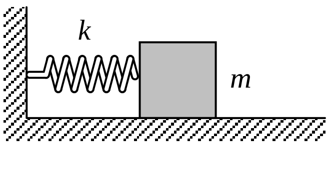


4.67. Kulka o masie $m = 2\,\text{kg}$ spada na znajdującą się $h = 50\,\text{cm}$ poniżej sprężynę. Na jaką odległość x sprężyna zostanie ściśnięta, jeżeli współczynnik sprężystości sprężyny $k = 50\,\text{N/m}$? Z jaką prędkością kulka oderwie się od sprężyny, gdy ta wróci do pierwotnej długości?



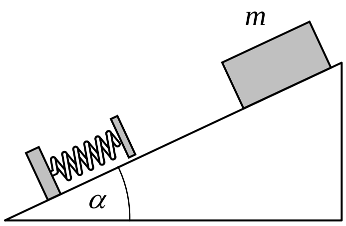
4.68. Student rozciągnął na odległość $d = 50\,\text{cm}$ ekspander zrobiony z czterech sprężyn. Jaką pracę wykonał student, jeżeli powtórzył to ćwiczenie $n = 10$ razy? Stała sprężystości każdej ze sprężyn wynosi $k = 100\,\text{N/m}$.

4.69. Przyczepiony do sprężyny ciężarek został wychylony z położenia równowagi o $x_0 = 75\,cm$ i pchnięty przeciwnie do kierunku wychylenia z prędkością $v_0 = 3\,\text{m/s}$. Jaka będzie jego prędkość, gdy wychylenie zmaleje do $x_1 = 25\,cm$? Jakie będzie wychylenie ciężarka, gdy jego prędkość zmaleje do zera? Masa ciężarka $m = 2\,\text{kg}$, współczynnik sprężystości sprężyny $k = 4\,\text{N/m}$. Tarcie pomiędzy ciężarkiem, a podłożem pominąć.



Jak zmieni się rozwiązanie zadania, jeżeli między ciężarkiem, a podłożem będzie występowało tarcie o współczynniku: a) $\mu = 0{,}75$, b) $\mu = 1{,}5$?

4.70. Blok o masie $m = 12\,\text{kg}$ spoczywa na równi o kącie nachylenia $\alpha = 25°$. Poniżej tego bloku znajduje się przymocowana do równi sprężyna, która może zostać ściśnięta o $x = 2\,\text{cm}$ siłą $F = 250\,\text{N}$. Blok zsuwając się ściska sprężynę o $l = 5\,\text{cm}$ i zatrzymuje się. Jaką całkowitą drogę przebył blok do momentu zatrzymania się i jaką prędkość miał blok, gdy dotknął sprężyny? Jaką odległość pokona blok zanim ponownie się zatrzyma? Tarcie pomiędzy blokiem i równią pominąć.



Rozwiązać również zadanie zakładając, że pomiędzy blokiem i równią działa siła tarcia o współczynniku $\mu = 0{,}1$.

4.71. Na ciało o masie $m = 3\,\text{kg}$ działa siła F powodując, że porusza się ono zgodnie z równaniem: $x = 3t - 4t^2 + t^3$. Jaką pracę wykonała ta siła w czasie od $t_1 = 0\,\text{s}$ do $t_2 = 3\,\text{s}$?

4.72. Jaką pracę wykonała siła $\vec{F} = \left(3x\vec{i} + 4y\vec{j}\right)\text{N}$ przesuwając ciało o masie $m = 2\,\text{kg}$ wzdłuż osi x na drodze $d = 5\,\text{m}$?

4.73. Na ciało o masie $m = 1\,\text{kg}$ działa siła $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Obliczyć pracę wykonaną przez tą siłę w czasie od $t_1 = 0\,\text{s}$ do $t_2 = 3\,\text{s}$, jeżeli ciało to przemieszczało się zgodnie z równaniem: $\vec{r} = (6 - 3t)\vec{i} + (-4 + 2t)\vec{j}$. Czy na to ciało działały jeszcze jakieś inne siły?

4.74. Ciało zostało przemieszczone w polu działania siły $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j}$ o wektor $\vec{r} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$. Jakie są składowe *a* i *b* siły $\vec{F}$, jeżeli jej moduł $F = 25$, a wykonana przez nią praca jest równa zeru?

4.75. Siła działająca na ciało o masie $m = 3\,\text{kg}$ powoduje, że porusza się ono po linii prostej zgodnie z równaniem: $x = 3t - 4t^2 + t^3$. Obliczyć prędkość ciała, przyspieszenie i działającą siłę oraz pracę, jaką wykonała ta siła w pierwszych dwóch oraz czterech sekundach ruchu.

4.76. Posługując się definicją pracy mechanicznej pokazać, że praca sił jednorodnego pola grawitacyjnego $\vec{F} = m\vec{g}$ nie zależy od kształtu drogi, lecz tylko od różnicy wysokości przemieszczanego w tym polu punktu materialnego. Znaleźć energię potencjalną tego pola $V(z)$. Sprawdzić, że $\vec{F} = -\text{grad}V$.

4.77. Sprawdzić, że jednorodne pole $\vec{F} = [1 \quad 1]$ jest polem zachowawczym. Obliczyć:

a) energię potencjalną $V(x\ y)$ tego pola,
b) pracę siły $\vec{F}$ przemieszczającej punkt materialny z położenia $\vec{r}_1 = [3 \quad 5]$ do położenia $\vec{r}_2 = [5 \quad 7]$,
c) różnicę energii potencjalnych $\Delta V = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$.

Sformułować wnioski. Siła i współrzędne wyrażone są w układzie jednostek SI.

4.78. Sprawdzić, czy siła $\vec{F} = \left[5y^2 - 3yz^2 \quad 10xy - 3xz^2 - 2z \quad -6xyz - 2y\right]$ jest siłą zachowawczą. Jeżeli siła okaże się siłą zachowawczą, to znaleźć odpowiadającą tej sile energię potencjalną.