3. Dynamika ruchu postępowego

Zasady dynamiki Newtona

Zasady dynamiki Newtona opisują zagadnienia mechaniki klasycznej. Zasady te pozwalają w szczególności znaleźć wszystkie parametry opisujące ruch ciała, takie jak położenie, prędkość i jego przyspieszenie w dowolnym momencie czasu oraz równanie trajektorii, po której ciało się porusza. Z zasad dynamiki formalnie wynikają również fundamentalne zasady zachowania: zasada zachowania pędu, zasada zachowania momentu pędu oraz zasada zachowania energii mechanicznej.

Pierwsza zasada dynamiki postuluje istnienie układów inercjalnych, tj. takich układów odniesienia, w których gdy na ciało nie działa siła (lub działające siły się równoważą), to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Układ inercjalny w uproszczony sposób można określić, jako układ, który nie doznaje przyspieszenia. Zasady dynamiki oraz wynikające z nich zapisy obowiązują w układach inercjalnych.

Druga zasada dynamiki wiąże siłę $\vec{F}$ działającą na ciało o masie m ze zmianą pędu $\vec{p}$ tego ciała:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{3.1}$$

Gdy masa ciała nie ulega zmianie w trakcie ruchu, *druga zasada dynamiki* przyjmuje postać:

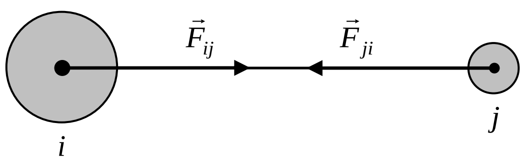
$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,, \tag{3.2}$$

gdzie $\vec{r}, \vec{v}$ i $\vec{a}$ jest odpowiednio wektorem wodzącym, prędkością i przyspieszeniem ciała.

Trzecia zasada dynamiki głosi, że jeżeli ciało *j* działa na ciało *i* z siłą $\vec{F}_{ij}$, to ciało *i* działa na ciało *j* z siłą $\vec{F}_{ji}$ o tej samej wartości i tym samym kierunku działania, lecz o przeciwnym zwrocie:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}\,. \tag{3.3}$$

Z zasady tej wynika, że $\vec{F}_{ii} = 0$, czyli że ciało samo z sobą nie może oddziaływać.



Rys. 3.1. Ilustracja do *trzeciej zasady dynamiki* w przypadku obiektów i oraz j wzajemnie się przyciągających

Równanie ruchu Newtona

Równanie to jest prostą konsekwencją *drugiej zasady dynamiki* i przedstawia, dla określonej siły działającej na ciało, różniczkową zależność promienia wodzącego od czasu:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{3.4}$$

Dwukrotne całkowanie tego równania prowadzi do znalezienia zależności wektora prędkości oraz wektora wodzącego od czasu i umożliwia określenie trajektorii, po której porusza się ciało. Jednoznaczne rozwiązanie tego równania wymaga znajomości dwóch warunków początkowych określających prędkość i położenie ciała w dowolnych momentach czasu. Dla szczególnego przypadku $\vec{a} = \mathrm{const}$, rozwiązaniem tego równania są relacje (2.11) i (2.12).

Układ swobodnych punktów materialnych. Środek masy

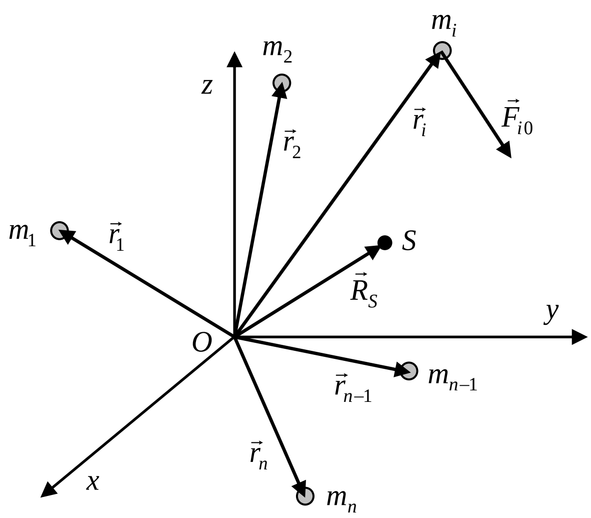
Rys. 3.2 przedstawia układ n punktów materialnych o masach m_i, które mogą swobodnie przemieszczać się pod wpływem sił wzajemnego oddziaływania $\vec{F}_{ij}$ oraz pod wpływem sił zewnętrznych $\vec{F}_{i0}$, jeżeli takie występują. Rozwiązanie równań ruchu Newtona dla układu swobodnych punktów na ogół nie jest możliwe. Możliwe jest natomiast określenie ruchu jego środka masy, zdefiniowanego przez wektor:

$$\vec{R}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \ , \tag{3.5}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \ , \quad \vec{R}_S = [X_S \quad Y_S \quad Z_S], \quad \vec{r}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]. \tag{3.6}$$

Środek masy porusza się jak punkt o masie M pod wpływem siły równej sumie wszystkich sił $\vec{F}_i$ działających na układ - redukującej się na mocy *trzeciej zasady dynamiki* do sumy sił zewnętrznych $\vec{F}_{i0}$:

$$M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_S}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \ , \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i0} \ . \tag{3.7}$$



Rys. 3.2. Swobodny układ n punktów materialnych. Środek masy oznaczono przez S . Przez $\vec{F}_{i0}$ oznaczono jedną z sił zewnętrznych w układzie

Definicja (3.5) środka masy dla układu punktów równoważna jest trzem zapisom skalarnym:

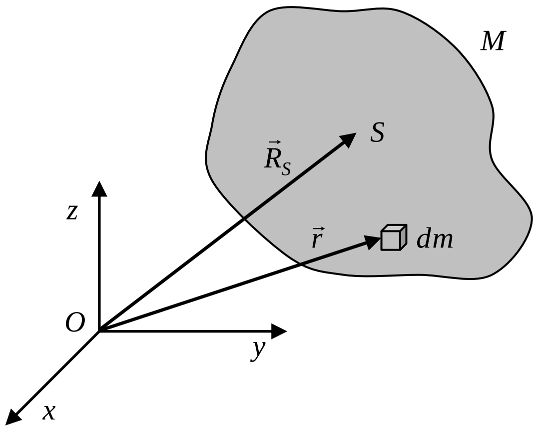
$$X_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,, \quad Y_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,, \quad Z_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \,. \tag{3.8}$$

Dla bryły o skończonych rozmiarach, definicja środka masy ma postać:

$$\vec{R}_S = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,\mathrm{d}m\,, \tag{3.9}$$

$$X_S = \frac{1}{M}\int_M x\mathrm{d}m\,, \quad Y_S = \frac{1}{M}\int_M y\mathrm{d}m\,, \quad Z_S = \frac{1}{M}\int_M z\mathrm{d}m\,, \tag{3.10}$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą objętość bryły o masie M .



Rys. 3.3. Ilustracja do definicji środka masy bryły o skończonych rozmiarach

Tarcie dynamiczne

Siła tarcia dynamicznego F_t jest proporcjonalna do siły nacisku N na podłoże

$$F_t = \mu N \tag{3.11}$$

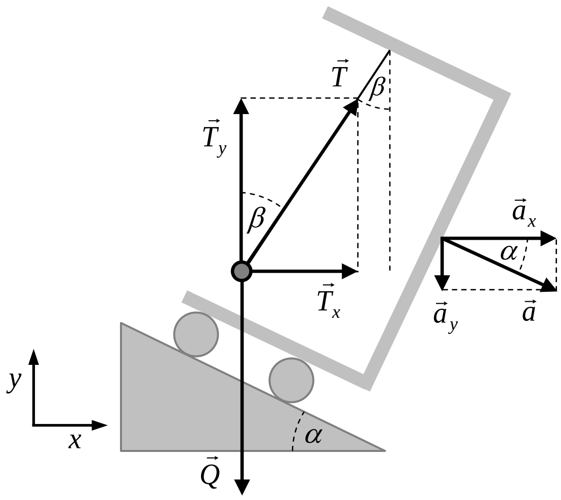
i nie zależy od prędkości oraz pola powierzchni stykających się ciał. Współczynnik μ jest współczynnikiem tarcia zależnym od rodzaju materiału przemieszczających się ciał i stanu ich powierzchni. Siła tarcia jest przeciwnie skierowana do wektora przemieszczenia ciała.

Przykłady

Przykład 3.1. Wahadło przyczepione jest do dachu wagonu zjeżdżającego z przyspieszeniem $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$ z górki rozrządowej o kącie nachylenia $\alpha = 25°$. Jaki jest kąt odchylenia wahadła od pionu?

Rozwiązanie:

Inercjalny układ odniesienia. W układzie tym, związanym z otoczeniem, wahadło wraz z wagonem porusza się z przyspieszeniem $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$. W zadaniu dobieramy taką orientację układu odniesienia, aby oś x skierowana była poziomo, a oś y pionowo. Na wahadło działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$ oraz oddziaływanie ze strony liny $\vec{T}$.



Zgodnie z *drugą zasadą dynamiki Newtona*, wypadkowa siła działająca na wahadło o masie m wynosi $\vec{F}_w = \vec{Q} + \vec{T} = m\vec{a}$. Porównując odpowiednie składowe wypadkowej siły wzdłuż osi x i y znajdziemy:

$$\begin{cases} T_x = m a_x, \\ -Q_y + T_y = -m a_y \end{cases}$$

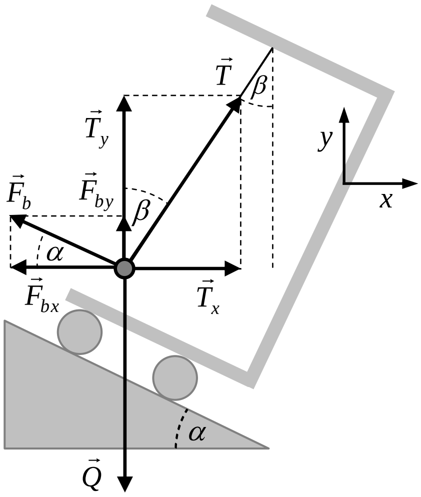
lub

$$\begin{cases} T \sin\beta = m a \cos\alpha\,, \\ -mg + T\cos\beta = -m a \sin\alpha\,. \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\tan\beta = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}\,.$$

Nieinercjalny układ odniesienia. W układzie tym, związanym z wagonem poruszającym się z przyspieszeniem $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$, wahadło pozostaje w spoczynku. W zadaniu dobieramy taką orientację układu odniesienia, aby oś x skierowana była poziomo, a oś y pionowo. Na wahadło działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$ oraz oddziaływanie ze strony liny $\vec{T}$. Ze względu na nieinercjalność układu odniesienia, wprowadzamy dodatkową siłę pozorną - w rzeczywistości nie działającą na wahadło pseudosiłę bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}$.



Ponieważ wahadło w rozważanym układzie pozostaje w spoczynku, więc zgodnie z *pierwszą zasadą dynamiki Newtona* wypadkowa siła działająca na wahadło jest równa zeru: $\vec{F}_w = \vec{Q} + \vec{T} + \vec{F}_b = 0$. Porównując odpowiednie składowe wypadkowej siły wzdłuż osi x i y znajdziemy:

$$\begin{cases} T_x - ma_x = 0\,, \\ -Q_y + T_y + ma_y = 0 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} T\sin\beta - ma\cos\alpha = 0\,, \\ -mg + T\cos\beta + ma\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\tan\beta = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}\,.$$

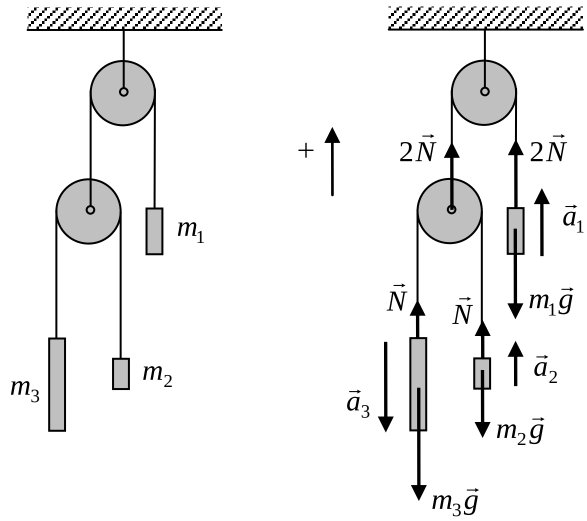
Rezultat w obydwu układach odniesienia jest taki sam i nie zależy od masy wahadła. Wahadło odchyli się o kąt $\beta = \arctan(0{,}318) = 17{,}7°$.

Przykład 3.2. Trzy ciężarki o masach $m_1 = 5\,\text{kg}$, $m_2 = 3\,\text{kg}$ i $m_3 = 10\,\text{kg}$ zawieszone są tak, jak na rysunku. Z jakim przyspieszeniem poruszają się te masy oraz jakie jest naprężenie linek? Masy bloczków i linek pominąć.

Rozwiązanie:

Definiujemy kierunek „dodatni”, zorientowany pionowo w górę. Bloczki i linki mają zaniedbywalne masy, więc naprężenie linki po obu stronach ruchomego bloczka jest takie samo i wynosi N, natomiast naprężenie linki przerzuconej przez bloczek nieruchomy jest dwukrotnie większe. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki, ruch każdego z ciężarków o masach m_1, m_2 i m_3 będzie w układzie związanym z nieruchomym bloczkiem opisany odpowiednio równaniem:

$$\begin{cases} 2N - m_1 g = m_1 a_1, \\ N - m_2 g = m_2 a_2, \\ N - m_3 g = -m_3 a_3. \end{cases}$$



Przedstawiony układ trzech równań zawiera cztery niewiadome. Brakujące równanie otrzymamy porównując wartości przyspieszenia masy m_2 i m_3 względem ruchomego bloczka, który porusza się w „ujemnym” kierunku z przyspieszeniem o wartości a_1. Wartość przyspieszenia masy m_2 względem ruchomego bloczka wynosi $a_2 + a_1$ (przeciwne ruchy - wartości przyspieszeń się sumują), natomiast masa m_3 porusza się względem ruchomego bloczka z przyspieszeniem o wartości $a_3 - a_1$ (zgodne ruchy - wartości przyspieszeń się odejmują). Ponieważ obydwie wartości względnych przyspieszeń mas m_2 i m_3 względem ruchomego bloczka są takie same, więc brakujące równanie ma postać:

$$a_2 + a_1 = a_3 - a_1 .$$

Rozwiązując powyższy układ czterech równań otrzymamy:

$$a_1 = \frac{4m_2 m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} g ,$$

$$N = \frac{1}{2} m_1 (g + a_1) = \frac{4m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} g ,$$

$$a_2 = \frac{N - m_2 g}{m_2} = \frac{4m_3(m_1 - m_2) - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} g ,$$

$$a_3 = \frac{m_3 g - N}{m_3} = \frac{4m_2(m_3 - m_1) + m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} g .$$

Uwzględniając dane liczbowe znajdziemy: $a_1 = 2{,}92\ \mathrm{m/s^2}$, $a_2 = 0{,}80\ \mathrm{m/s^2}$, $a_3 = 6{,}63\ \mathrm{m/s^2}$, $N = 31{,}82\ \mathrm{N}$.

Przykład 3.3. Trzy masy punktowe leżą w płaszczyźnie xy i w chwili $t_0 = 0$ znajdują się w spoczynku. Masy, położenia początkowe mas oraz działające na nie siły przedstawione są w tabeli.

a) Znaleźć położenia poszczególnych punktów po upływie $t = 5\,\mathrm{s}$.
b) W oparciu o uzyskane wyniki obliczyć położenie środka masy układu po upływie $t = 5\,\mathrm{s}$.
c) Obliczyć położenie środka masy układu w chwili $t = 0$.
d) Stosując twierdzenie o ruchu środka masy układu punktów materialnych, obliczyć położenie środka masy układu po upływie $t = 5\,\mathrm{s}$. Porównać wyniki z punktów b) i d).

Punkt	$m_i\,[kg]$	$x_i\,[\mathrm{m}]$	$y_i\,[\mathrm{m}]$	$\vec{F}_i\,[\mathrm{N}]$
P_1	3	-1	2	$2\,\vec{i}$
P_2	5	-2	-1	$\vec{j}$
P_3	2	1	1	$-\vec{i}$

Rozwiązanie:

a) Na poszczególne masy punktowe działają stałe siły, więc ich położenia $\vec{r}_i(t)$ opisane są równaniem (2.12). Przyjmując $t_0 = 0$ i $\vec{v}_{i0} = 0$ otrzymamy:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \frac{1}{2}\vec{a}_i t^2 = \vec{r}_{i0} + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_i}{m_i}t^2 .$$

Uwzględniając dane z tabeli, znajdujemy położenia punktów po czasie $t = 5\,\mathrm{s}$:

$$\vec{r}_1(t=5) = \begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}}{3}5^2 = \begin{bmatrix}7\frac{1}{3} & 2\end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_2(t=5) = \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}{5}5^2 = \begin{bmatrix}-2 & 1\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_3(t=5) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}}{2}5^2 = \begin{bmatrix}-5\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}.$$

b) Położenie środka masy po czasie $t = 5\,\mathrm{s}$ wyznacza, zgodnie z definicją środka masy, wektor:

$$\vec{R}_s(t=5) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i(t=5) = \frac{1}{10}\left(3\begin{bmatrix}7\frac{1}{3} & 2\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}-2 & 1\frac{1}{2}\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-5\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix}\frac{3}{20} & \frac{31}{20}\end{bmatrix}.$$

c) Położenie środka masy w momencie $t = 0\,\mathrm{s}$ określa wektor:

$$\vec{R}_s(t=0) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i(t=0) = \frac{1}{10}\left(3\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix}-1\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

d) Twierdzenie o ruchu środka masy głosi, że środek masy przemieszcza się jak punkt o masie równej masie całego układu, na który działa siła równa sumie wszystkich sił działających na poszczególne punkty. Przy uwzględnieniu warunków początkowych, położenie środka masy opisuje więc wektor położenia:

$$\vec{R}_s(t) = \vec{R}_s(t=0) + \frac{1}{2}\vec{a}_s t^2,$$

gdzie przyspieszenie środka masy wynosi

$$\vec{a}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}2 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}.$$

Uwzględniając rezultat z punktu c) otrzymamy:

$$\vec{R}_s(t=5) = \begin{bmatrix}-1\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}5^2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{20} & \frac{31}{20}\end{bmatrix}.$$

Wynik ten jest identyczny z wynikiem uzyskanym w punkcie b). Otrzymany dwoma sposobami rezultat na położenie środka masy układu po upływie pewnego czasu jest taki sam, co potwierdza twierdzenie o ruchu środka masy układu.

Zadania

3.1. Samochód porusza się z przyspieszeniem $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Jaką siłą człowiek o masie $m = 70\,\mathrm{kg}$ działa na oparcie siedzenia?

3.2. Oblicz masę ciała poruszającego się po torze prostoliniowym, które pod wpływem siły $F = 40\,\mathrm{N}$ zmieniło swoją prędkość z $v_1 = 10\,\mathrm{m/s}$ do $v_2 = 4\,\mathrm{m/s}$ w czasie $\Delta t = 60\,s$.

3.3. Dwutonowy samochód poruszając się ze stałym przyspieszeniem osiąga prędkość $v = 100\,\mathrm{km/h}$ w czasie $t = 12\,\mathrm{s}$. Jaka siła działa na ten samochód?

3.4. Jaka siła działa na strzelca karabinu maszynowego wystrzeliwującego w ciągu minuty $n = 200$ pocisków o masie $m = 50\,\mathrm{g}$ każdy? Prędkość początkowa pocisku $v = 1000\,\mathrm{m/s}$.

3.5. Na ciało o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ działa pozioma siła $F_1 = 4\,\mathrm{N}$. Jaki jest kierunek, zwrot i wartość przyspieszenia, z jakim porusza się to ciało? Jak zmieni się przyspieszenie, gdy na ciało zacznie działać dodatkowa siła $F_2 = 3\,\mathrm{N}$, równoległa do siły F_1:

a) skierowana zgodnie ze zwrotem siły F_1,

b) skierowana przeciwnie do zwrotu siły F_1.

3.6. Ciało o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$ w czasie pierwszych $t = 10\,\mathrm{s}$ przebyło drogę $s = 100\,\mathrm{m}$. Znaleźć wartość stałej siły działającej na ciało.

3.7. Samochód o masie $m = 1200\,\mathrm{kg}$ jedzie po poziomej ulicy z prędkością $v = 72\,\mathrm{km/h}$. Jaka musi być wartość stałej siły hamującej F działającej na ten samochód, aby zatrzymał się on na odcinku drogi $s = 20\,\mathrm{m}$?

3.8. Lokomotywa na poziomym, prostoliniowym odcinku o długości $s = 600\,\mathrm{m}$ rozpędziła pociąg z prędkości $v_1 = 36\,\mathrm{km/h}$ do $v_2 = 54\,\mathrm{km/h}$. Jaka była wartość sił tarcia F_t, jeżeli całkowita masa pociągu $m = 1000\,\mathrm{t}$, a siła ciągu lokomotywy $F = 14{,}7 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$?

3.9. Statek o masie m, w momencie zastopowania silnika, miał prędkość v. Znaleźć odległość, jaką przebędzie statek do momentu, gdy jego prędkość osiągnie połowę wartości prędkości początkowej. Jaki dystans pokona statek do momentu zatrzymania się? Nastatek działa siła oporu proporcjonalna do prędkości: $F = -kv$?

3.10. Na pojazd o masie m działa hamująca siła oporu $F = -kv^2$. Jaką odległość s przejedzie pojazd, zanim jego prędkość zmaleje do połowy?

3.11. Ciało o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$ porusza się po trajektorii opisanej równaniem: $\vec{r} = 5t\vec{i} + \left(3 + 2t^2 - 4t^3\right)\vec{j}$. Jaka siła działa na to ciało? Jakim ruchem porusza się ono wzdłuż osi x i y - jednostajnym, przyspieszonym, czy opóźnionym?

3.12. Na ciało o masie $m = 2\,\mathrm{kg}$ działa siła $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ oraz nieznana siła $\vec{F}_2$. Jaka jest nieznana siła, jeśli położenie ciała zmienia się zgodnie z równaniem: $\vec{r} = (6 - 3t)\vec{i} + \left(-4 + 2t^2\right)\vec{j}$?

3.13. Człowiek o masie $m = 70\,\mathrm{kg}$ działa na dno kosza balonu z siłą $N = 500\,\mathrm{N}$. Wyznaczyć wartość i zwrot przyspieszenia, z jakim porusza się balon.

3.14. Balon o masie $M = 500\,\mathrm{kg}$ opada ze stałą prędkością $v = 1\,\mathrm{m/s}$. Jaki balast m należy odrzucić, aby balon wznosił się z taką samą prędkością? Siła wyporu dla tego balonu $F_W = 4500\,\mathrm{N}$.

3.15. Aby wyznaczyć ciężar pudełka, położono go na jednej szalce wagi, a na drugiej szalce umieszczono jednocześnie odważnik o masie $m_1 = 100\,\mathrm{g}$. Pudełko zaczęło opadać z pewnym przyspieszeniem. Gdy zwiększono masę odważników do $m_2 = 500\,\mathrm{g}$, pudełko zaczęło się wznosić z takim samym przyspieszeniem. Jaki jest ciężar pudełka?

3.16. Człowiek o masie $m = 70\,\mathrm{kg}$ stoi na wadze w poruszającej się windzie. Jakie będą wskazania wagi, gdy:

a) winda stoi,
b) winda porusza się do góry ruchem jednostajnym, z prędkością $v = 5\,\mathrm{m/s}$,
c) winda porusza się do góry z przyspieszeniem $a_1 = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$,
d) winda porusza się w dół przyspieszeniem $a_2 = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$,
e) poruszająca się do góry winda zatrzymuje się z przyspieszeniem $a_3 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$,
f) poruszająca się w dół winda zatrzymuje się z przyspieszeniem $a_4 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$?

3.17. Winda porusza się do góry z przyspieszeniem $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Do sufitu windy przyczepiono, za pomocą linki o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ i masie $m = 100\,\mathrm{g}$, ciężarek o masie $M = 200\,\mathrm{g}$. Jak zmienia się wzdłuż linki jej naprężenie?

3.18. Winda z pasażerami ma łączną masę $m = 1000\,\mathrm{kg}$. Wyznaczyć kierunek i przyspieszenie ruchu windy, jeśli naprężenie liny, na której zawieszona jest winda wynosi $N = 5000\,\mathrm{N}$.

3.19. Człowiek o masie $m = 80\,\mathrm{kg}$ wspina się po linie z przyspieszeniem $a = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$. Obliczyć naprężenie liny.

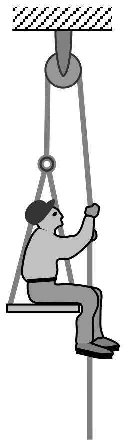
3.20. Jakie jest naprężenie N liny, do której jest podczepiony ciężar o masie $m = 150$ kg, gdy:

a) ciężar podnoszony jest z przyspieszeniem $a = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$,

b) ciężar opuszczany jest z przyspieszeniem $a = 0{,}8\,\mathrm{m/s^2}$?

3.21. Człowiek o masie $m = 80\,\mathrm{kg}$ zsuwa po linie o długości $l = 10\,\mathrm{m}$ i masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ ze stałą prędkością $v = 1\,\mathrm{m/s}$. Jakie będzie naprężenie liny w połowie jej długości, gdy człowiek zsunie się do tego miejsca?

3.22. Człowiek o masie $m = 75\,\mathrm{kg}$ siedzi na desce i wciąga się do góry ciągnąc za linę przewieszoną przez bloczek. Z jaką siłą człowiek ciągnie za linę, jeżeli porusza się z przyspieszeniem $a = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$? Masę deski i liny pominąć.



3.23. Z kosza poruszającego się w pionie balonu zwisa lina z ciężarkiem o masie $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$. Do tego ciężarka przywiązana jest kolejna lina, z ciężarkiem o masie $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. Obliczyć naprężenie górnej liny, jeśli naprężenie liny pomiędzy ciężarkami wynosi $N = 9{,}81\,\mathrm{N}$.

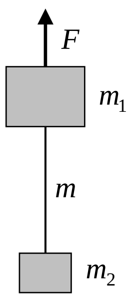
3.24. Ciało o masie m zawieszone jest na sznurku. Gdy podnoszono je z przyspieszeniem $a_1 = 2\,\mathrm{m/s^2}$ naprężenie sznurka wynosiło $N = 100\,\mathrm{N}$. Gdy zaczęto podnosić ciało z przyspieszeniem $a_2 = 8\,\mathrm{m/s^2}$ sznurek pękł. Obliczyć masę ciała oraz naprężenie sznura, gdy pękł.

3.25. Dwie skrzynki, o masach $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$, połączono stalową linką o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ i wciągano do góry z siłą $F = 200\,\mathrm{N}$. Jakie jest naprężenie linki

a) w punkcie zaczepienia do skrzynki pierwszej,

b) w punkcie zaczepienia do skrzynki drugiej,

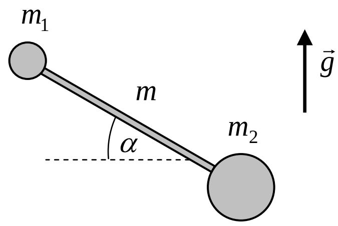
c) w połowie długości linki?



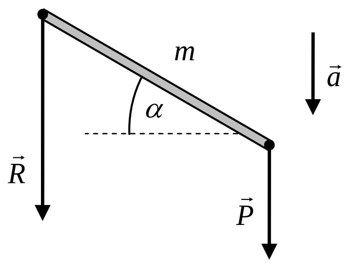
3.26. Maksymalny ciężar, jaki można podnieść za pomocą stalowej linki, przy którym nie ulegnie ona zerwaniu, wynosi $M = 500\,\text{kg}$. Z jakim przyspieszeniem można podnosić ciężar o masie $m = 400\,\text{kg}$, aby linka nie zerwała się?

3.27. Dźwig podnosi ciężar Q zawieszony na linie, której dopuszczalne naprężenie wynosi $N_{\max}$. Znaleźć najkrótszy czas, w którym można podnieść ten początkowo spoczywający ciężar na wysokość h. Ciężar liny pominąć.

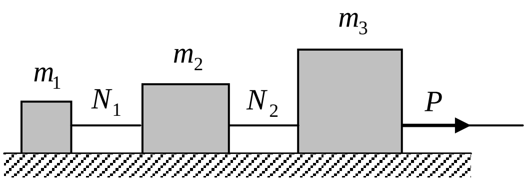
3.28. Na końcach belki, o długości $l = 5\,\text{m}$, masie $m = 1\,\text{kg}$ i nachylonej pod kątem $\alpha = 30°$, znajdują się masy $m_1 = 2\,\text{kg}$ i $m_2 = 5\,\text{kg}$. Jaka powinna być wartość dodatkowej siły, jej zwrot i punkt zaczepienia, aby belka nie wykonywała ruchu obrotowego oraz poruszała się z przyspieszeniem ziemskim g do góry?



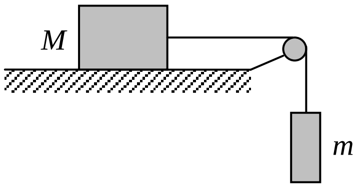
3.29. Na końce belki o masie $\mathrm{m} = 1\,\text{kg}$ i długości $\mathrm{l} = 4\,\text{m}$ działają siły $\mathrm{P} = 10\,\text{N}$ i $\mathrm{R} = 20\,\text{N}$. W którym punkcie należy przyłożyć dodatkową siłę F i jaka powinna być jej wartość, aby belka spadała w dół pod kątem $\alpha = 30°$ z przyspieszeniem ziemskim g ?



3.30. Trzy klocki o masach: $m_1 = 15\,\text{kg}$, $m_2 = 25\,\text{kg}$, $m_3 = 35\,\text{kg}$ są połączone ze sobą linką i wprawiane w ruch po podłodze o gładkiej powierzchni. Naprężenie ostatniego odcinka linki $N_1 = 15\,\text{N}$. Znaleźć naprężenie N_2 linki oraz siłę P wprawiającą układ w ruch.

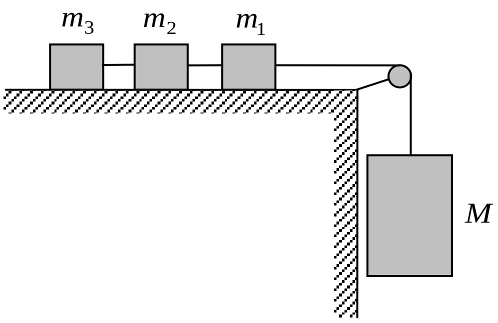


3.31. Obliczyć przyspieszenie, z jakim odbywa się ruch układu ciał o masach $m = 7\,\text{kg}$ i $M = 13\,\text{kg}$ pokazany na rysunku. Tarcie pominąć.

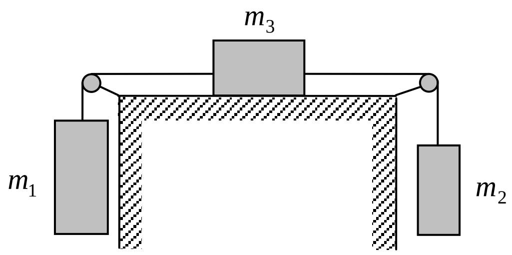


3.32. Na gładkim stole połączono linką masy $m_1 = 1\,\text{kg}$, $m_2 = 2\,\text{kg}$ i $m_3 = 1\,\text{kg}$, a do końca linki podwieszono masę $M = 3\,\text{kg}$. Obliczyć:

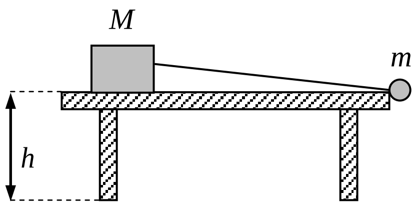
a) przyspieszenie a układu,
b) naprężenie wszystkich odcinków linki. Tarcie pominąć.



3.33. Trzy pudełka zostałały połączone linkami tak, jak na rysunku. Jakie jest naprężenie obu linek oraz wartość i kierunek przyspieszenia poszczególnych pudełek, jeżeli ich masy wynoszą: $m_1 = 10\,\text{kg}$, $m_2 = 4\,\text{kg}$, $m_3 = 6\,\text{kg}$? W rozwiązaniu pominąć tarcie.



3.34. Dwa odważniki o masach $M = 2\,\text{kg}$ i $m = 1\,\text{kg}$ połączono linką o długości $l = 2\,\text{m}$ i położono na gładkim stole o wysokości $h = 0{,}75\,\text{m}$. Przy naprężonej lince przesunięto mniejszą masę poza krawędź stołu, pozwalając jej na spadek. Obliczyć czasy t_m i t_M, po których odpowiednio masa m i M zetknie się z podłogą.



3.35. Jaką siłą należy przycisnąć klocek o masie $m = 5\,\text{kg}$ do ściany, aby nie ześliznął się on w dół? Współczynnik tarcia pomiędzy ścianą a klockiem wynosi $\mu = 0{,}5$.

3.36. Ciało o masie $m = 2\,\text{kg}$ spoczywa na poziomej powierzchni. Jakiej należy użyć siły, aby ciało to poruszało się z przyspieszeniem $a = 25\,\text{cm/s}^2$? Współczynnik tarcia pomiędzy ciałem, a podłożem wynosi $\mu = 0{,}2$.

3.37. Jak daleko od środka talerza gramofonu wykonującego $n = 33\frac{1}{3}$ obrotu na minutę można położyć monetę bez obawy, że z tego talerza spadnie. Współczynnik tarcia pomiędzy monetą i tarczą wynosi $\mu = 0{,}25$?

3.38. Z jaką maksymalną prędkością samochód może bez wpadania w poślizg pokonać zakręt o promieniu krzywizny $r = 150\,\mathrm{m}$, jeżeli nawierzchnia drogi nachylona jest pod kątem $\alpha = 15°$? Współczynnik tarcia kół o asfalt wynosi $\mu = 0{,}5$.

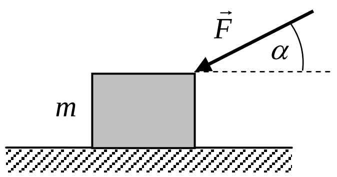
3.39. Jaką drogę pokona samochód, który wpadł w poślizg przy prędkości $v = 100$ km/h z zablokowanymi kołami? Współczynnik tarcia kół o jezdnię wynosi $\mu = 0{,}5$.

3.40. Drewniany klocek spoczywa na desce. Gdy deska zostanie nachylona pod kątem $\alpha = 40°$, klocek zaczyna się zsuwać. Ile wynosi współczynnik tarcia pomiędzy klockiem i deską?

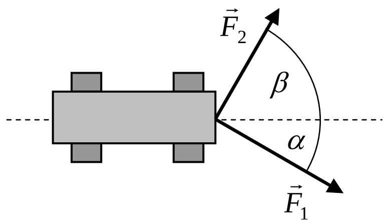
3.41. Współczynnik tarcia pomiędzy drewnianym klockiem o masie $m = 300\,\mathrm{g}$, a podłożem wynosi $\mu = 0{,}4$. Z jaką siłą należy pociągnąć za klocek, aby go poruszyć, jeżeli siła jest skierowana pod kątem $\alpha = 25°$ do poziomu?

3.42. Robotnik ciągnie skrzynię o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ z siłą $F = 25\,\mathrm{N}$ skierowaną pod kątem $\alpha = 30°$ do powierzchni podłoża. Jaki jest współczynnik tarcia, jeżeli skrzynia porusza się ruchem jednostajnym?

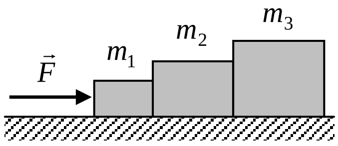
3.43. Na klocek o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ działa siła F skierowana pod kątem α do poziomu. Zmniejszanie kąta α powoduje wzrost wartości siły F niezbędnej do poruszenia klocka. Przy pewnym granicznym kącie, niezależnie od wartości przyłożonej siły, klocek pozostanie w spoczynku. Ile wynosi ten kąt, jeżeli współczynnik tarcia pomiędzy klockiem, a podłożem $\mu = 0{,}25$?



3.44. Wózek ciągnięty przez dwie osoby porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż przerywanej linii. Jedna z osób ciągnie wózek z siłą $F_1 = 500\,\mathrm{N}$ pod kątem $\alpha = 30°$. Druga osoba ciągnie wózek z siłą F_2 pod kątem $\beta = 60°$. Jaka jest wartość siły F_2 oraz wartość i kierunek siły tarcia pomiędzy wózkiem, a podłożem?

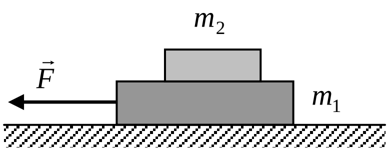


3.45. Siła $F = 200\,\mathrm{N}$ wprawia w ruch pudełka o masach: $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ i $m_3 = 6\,\mathrm{kg}$. Jaka jest wartość i kierunek sił składowych oraz wypadkowych działających na poszczególne pudełka? Z jakimi przyspieszeniami pudełka się poruszają? Współczynnik tarcie pomiędzy pudełkami a podłożem $\mu = 0{,}25$.

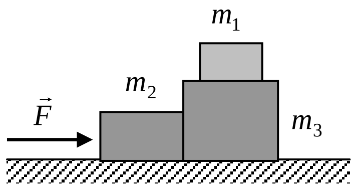


3.46. Na desce o masie $m_1 = 5\,\text{kg}$ leży klocek o masie $m_2 = 2\,\text{kg}$. Współczynnik tarcia pomiędzy deską a podłożem oraz pomiędzy deską i klockiem wynosi $\mu = 0{,}2$. Jaka powinna być wartość siły F, aby:

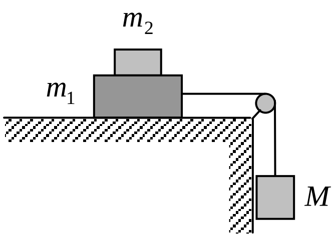
a) deska nie poruszała się,
b) deska poruszała się, a klocek nie ślizgał się po desce,
c) pomiędzy deską i klockiem występował poślizg?



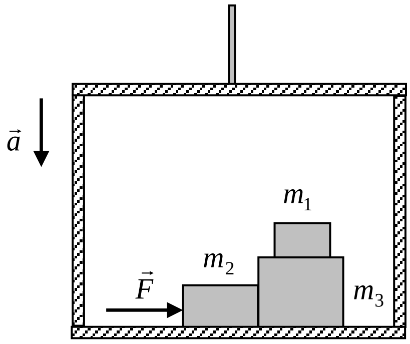
3.47. Siła $F = 200\,\text{N}$ przesuwa ruchem jednostajnym pudełka o masach $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 3\,\text{kg}$ i $m_3 = 6\,\text{kg}$. Jaka jest wartość i kierunek sił składowych oraz wypadkowych działających na poszczególne pudełka? Ile wynosi współczynnik tarcie pomiędzy pudełkami a podłożem?



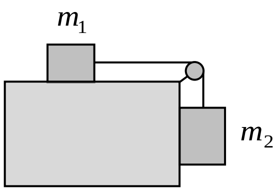
3.48. W układzie przedstawionym na rysunku, ciężarek o masie M sprawia, że klocki o masach $m_1 = 2\,\text{kg}$ i $m_2 = 1\,\text{kg}$ przesuwają się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Obliczyć maksymalną masę ciężarka, przy której oba klocki mają takie same przyspieszenie (nie poruszają się względem siebie). Współczynnik tarcia pomiędzy klockami wynosi $\mu = 0{,}5$, a pomiędzy dolnym klockiem, a podłożem $\mu_1 = 0{,}25$.



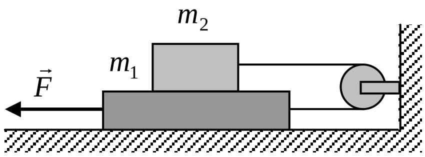
3.49. Siła $F = 200\,\text{N}$ powoduje przesuwanie się pudełek o masie $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 3\,\text{kg}$ i $m_3 = 6\,\text{kg}$ z takim samym przyspieszeniem poziomym. Jaka jest wartość i kierunek sił składowych oraz wypadkowych działających na poszczególne pudełka? Z jakimi przyspieszeniami pudełka się poruszają? Współczynnik tarcia pomiędzy pudełkami a podłożem wynosi $\mu = 0{,}25$. Cały układ znajduje się w windzie poruszającej się na dół z przyspieszeniem $a = 4\,\text{m/s}^2$.



3.50. Z jakim przyspieszeniem i w którą stronę powinna poruszać się skrzynia, aby ciężarki o masach $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ pozostawały w spoczynku? Współczynnik tarcia obydwu mas o ścianki skrzyni $\mu = 0{,}1$.



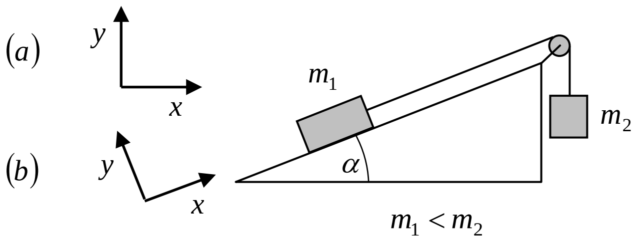
3.51. Jaką siłę należy przyłożyć do masy m_1, aby masa ta poruszała się z przyspieszeniem $a = g/2$, jeżeli tarcie o współczynniku $\mu = 1{,}5$ występuje tylko między masami $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$? Jaka siła działa na podstawę bloczka?



3.52. Z jakim przyspieszeniem poruszają się klocki z poprzedniego zadania i jakie jest naprężenie liny, jeżeli $F = 100\,\mathrm{N}$, a współczynniki sił tarcia pomiędzy wszystkimi powierzchniami są takie same i wynoszą $\mu = 0.2$?

3.53. W wesołym miasteczku znajduje się wirująca wokół pionowej osi beczka o promieniu $r = 5\,\mathrm{m}$. Ile obrotów na minutę wykonuje beczka, jeżeli znajdujący w niej ludzie się są „przyklejeni" do ścianek pomimo obniżenia podłogi? Współczynnik tarcia pomiędzy ludźmi a beczką wynosi $\mu = 0{,}25$.

3.54. Układ przedstawiony na rysunku znajduje się w stanie spoczynku. Zaznaczyć wszystkie siły działające na oba klocki, bloczek oraz równię. Obliczyć składowe siły wypadkowej działającej na każde ciało w obydwu układach odniesienia.



3.55. Klocek o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ znajduje się na równi o kącie nachylenia $\alpha = 60°$. Jaką siłą prostopadłą do równi należy go przycisnąć, aby pozostawał w spoczynku? Współczynnik tarcia pomiędzy równią a klockiem $\mu = 0{,}1$.

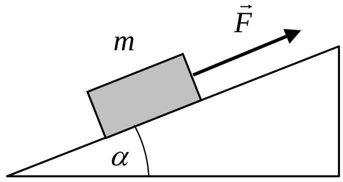
3.56. Ciało zsuwa się z wysokości $h = 30\,\mathrm{m}$ wzdłuż zbocza góry nachylonego do poziomu pod kątem $\alpha = 30°$. Jaką prędkość końcową osiągnie to ciało, jeżeli współczynnik tarcia $\mu = 0{,}2$?

3.57. Jaką prędkość początkową v_0 należy nadać ciału o masie m, aby wsunęło się na szczyt równi o długości s i kącie nachylenia α? Współczynnik tarcia wynosi μ.

3.58. Ciało przesuwa się ku górze wzdłuż równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^0$ z prędkością początkową $v_0 = 2$ m/s. Jaką prędkość uzyska to ciało po powrocie do podstawy równi? Współczynnik tarcia $\mu = 0{,}2$.

3.59. Skrzynia o masie $m = 100\,\text{kg}$ znajduje się w ciężarówce jadącej po wzgórku o kącie nachylenia $\alpha = 15°$. Z jakim przyspieszeniem może poruszać się ciężarówka wjeżdżając na wzgórek oraz zjeżdżając ze wzgórka, aby skrzynia nie zaczęła się przesuwać. Współczynnik tarcia pomiędzy skrzynią i ciężarówką $\mu = 0{,}45$.

3.60. Z jakim przyspieszeniem porusza się po równi skrzynia o masie $m = 30\,\text{kg}$, jeżeli działa na nią siłą $F = 100\,\text{N}$ równoległą do równi. Kąt nachylenia równi $\alpha = 35°$ .Współczynnik tarcia skrzyni o równię $\mu = 0{,}2$.



3.61. Narciarz zjeżdża z górki, której nachylenie wynosi $\alpha = 45°$, a jej zbocze ma długość $s = 25\,\text{m}$. Jaką odległość l przejedzie narciarz na poziomym odcinku po zjechaniu z tej górki? Na całej drodze, jaką przebywa narciarz, współczynnik tarcia wynosi $\mu = 0{,}4$.

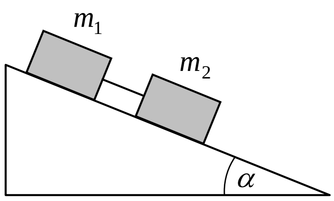
3.62. Ciało zsunęło się z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ w czasie t_0. Gdyby pomiędzy ciałem, a równią nie występowały siły tarcia, zsunęłoby się ono dwa razy szybciej. Ile wynosi współczynnik tarcia?

3.63. Dwa klocki połączone są linką i poruszają się po powierzchni równi o kącie nachylenia $\alpha = 35°$. Jakie jest przyspieszenie obu klocków oraz naprężenie linki, gdy:

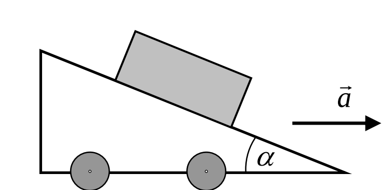
a) $m_1 = 1\,\text{kg}$ i $m_2 = 2\,\text{kg}$,

b) $m_1 = 2\,\text{kg}$ i $m_2 = 1\,\text{kg}$?

Współczynnik tarcia pierwszego klocka o równię wynosi $\mu_1 = 0{,}3$, a drugiego $\mu_2 = 0{,}5$.



3.64. Na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α znajduje się klocek, którego współczynnik tarcia o równię wynosi μ. Z jakim minimalnym przyśpieszeniem $\vec{a}$ w kierunku poziomym musi poruszać się równia, aby klocek mógł przemieszczać się w górę, wzdłuż równi?

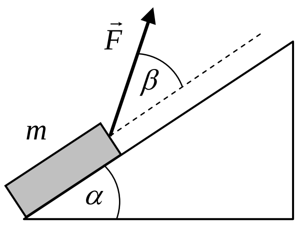


3.65. Na równi o kącie nachylenia $\alpha = 30°$, poruszającej się poziomo z przyspieszeniem $a = 20\,\mathrm{m/s^2}$, znajduje się klocek o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$. Klocek porusza się względem równi z przyspieszeniem a_1 w górę równi. Współczynnik tarcia klocka o równię $\mu = 0{,}5$. Znaleźć przyspieszenie a_1 oraz nacisk N klocka na równię.

3.66. Z jakim przyspieszeniem w kierunku poziomym musi poruszać się równia o kącie nachylenia $\alpha = 30°$, aby znajdujący się na niej ciężarek był względem niej w spoczynku? Współczynnik tarcia ciężarka o równię $\mu = 0{,}3$.

3.67. Ciężar o masie $m = 150\,\mathrm{kg}$ ma być przeciągnięty przy pomocy liny. Jaką minimalną wytrzymałość na zerwanie musi mieć ta lina, aby nie uległa przerwaniu? Pod jakim kątem względem podłoża powinna być zorientowana lina podczas przesuwania ciężaru? Współczynnik tarcia między przeciąganą masą, a podłożem $\mu = 0{,}75$.

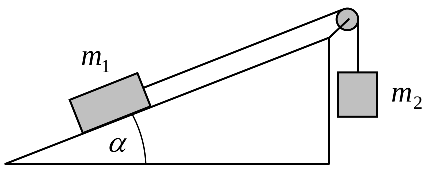
3.68. Robotnik chce wciągnąć skrzynię na pochylnię o kącie nachylenia $\alpha = 25°$. Pod jakim kątem β względem pochylni powinna być zorientowana siła, aby miała minimalną wartość? Jaka jest wartość tej siły? Ile będzie wynosił kąt β, gdy $\alpha = 0°$? Masa skrzyni $m = 100\,\mathrm{kg}$, współczynnik tarcia skrzyni o pochylnię $\mu = 1$.



3.69. Jaka jest masa m_1, jeżeli masa $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$ porusza się

a) z przyspieszeniem $a = 5\,\mathrm{m/s^2}$ do góry,
b) z przyspieszeniem $a = 5\,\mathrm{m/s^2}$ do dołu?

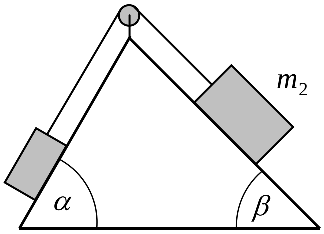
Kąt nachylenia równi $\alpha = 25°$, a współczynnik tarcia klocka o równię $\mu = 0{,}5$.



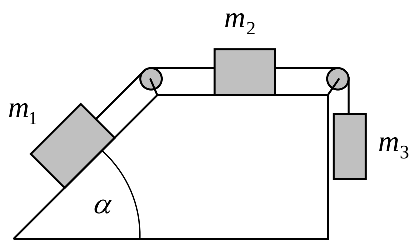
3.70. Dwa ciężarki o masach $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ połączono nieważką, nierozciągliwą linką i przewieszono przez bloczek. Kąty nachylenia równi wynoszą: $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. Obliczyć:

a) przyspieszeniem z jakim poruszają się ciężarki,
b) naprężenie linki,
c) siłę z jaką linka działa na bloczek.

Tarcie pomiędzy ciężarkami, a równią pominąć.

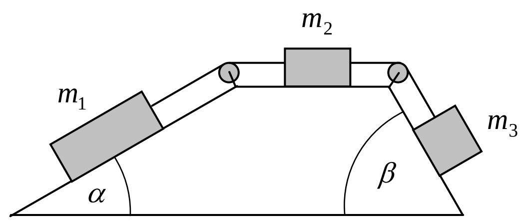


3.71. Trzy masy połączono linkami. Obliczyć przyspieszenie, z jakim poruszają się masy oraz naprężenie każdej z linek. Kąt nachylenia równi $\alpha = 45°$. Tarcie pominąć.

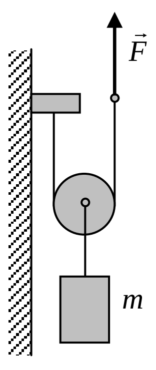


3.72. Układ trzech klocków o masach: $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 20\,\mathrm{kg}$, porusza się z pewnym przyspieszeniem. Wyznaczyć to przyspieszenie oraz naprężenia poszczególnych linek łączących klocki. Obliczyć także prace, jakie wykonują poszczególne siły. Kąty nachylenia równi: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. Rozważyć dwa przypadki:

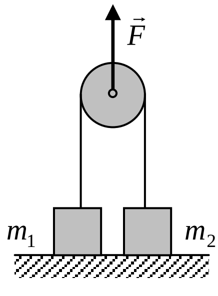
a) ruch odbywa się bez tarcia,
b) współczynnik tarcia pomiędzy każdym z klocków, a podłożem wynosi $\mu = 0{,}2$.



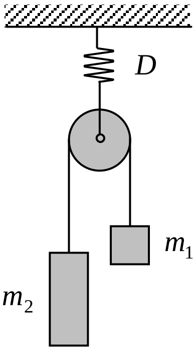
3.73. Skrzynia o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ wciągana jest za pomocą bloczka. Jaką siłą należy ciągnąć za linę, aby skrzynia wciągana była z przyspieszeniem $a = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$?



3.74. Dwa ciężarki o masach $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ połączono linką przewieszoną przez nieważki bloczek. Oba ciężarki spoczywają na ziemi. Jakie będzie ich przyspieszenie, gdy na bloczek zacznie działać siła F równa: $15\,\mathrm{N}$, $30\,\mathrm{N}$, $60\,\mathrm{N}$?



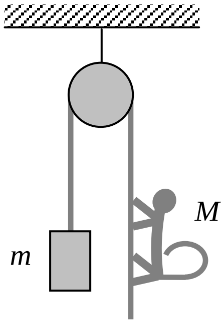
3.75. Dwa ciała o masach $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ połączone są linką przewieszoną przez bloczek podwieszony poprzez dynamometr do sufitu. Z jakim przyspieszeniem poruszają się te masy? Jakie jest naprężenie linki z obu stron bloczka i jakie jest wskazanie dynamometru? Co wskazywałby dynamometr gdyby bloczek nie mógł się obracać, uniemożliwiając ruch ciężarkom? Masa bloczka i linki jest do zaniedbania.



3.76. Na linie przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do ciężarka o masie m znajduje się małpa o masie M. Z jakim przyspieszeniem a będzie poruszał się ciężarek, gdy:

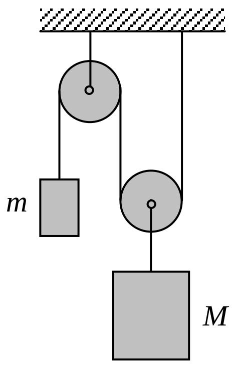
a) małpa nie porusza się względem liny,
b) małpa wspina się ze stałą prędkością v_0 względem liny,
c) małpa porusza się ze stałym przyspieszeniem a_0 względem liny?

Masę bloku i tarcie pominąć.

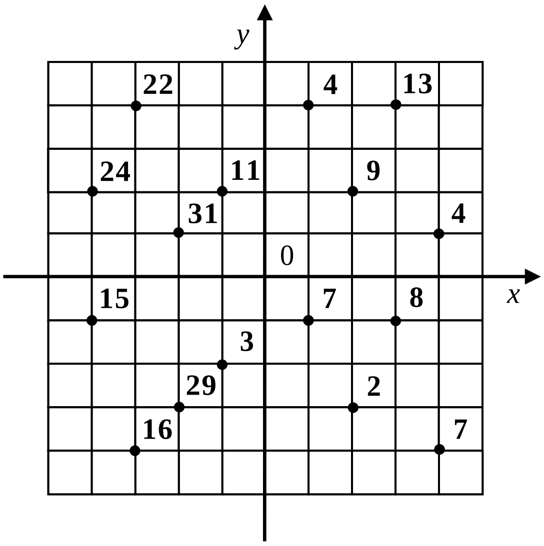


3.77. Do nieważkiej nici przerzuconej przez nieruchomy bloczek podwieszono ciało o masie $M = 3\,\mathrm{kg}$, na które położono inne ciało o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Jakie przyśpieszenie a nada tym ciałom siła $F = 40\,\mathrm{N}$, przyłożona do drugiego końca nici i skierowana pionowo w dół? Z jaką siłą F_1 masa m działa na masę M ?

3.78. Obliczyć przyspieszenie ciał o masach $m = 1\,\mathrm{kg}$ i $M = 3\,\mathrm{kg}$ oraz naprężenie linki w układzie pokazanym na rysunku. Masę bloczków i tarcie pominąć.



3.79. Określić położenie środka masy układu punktów materialnych rozmieszczonych tak, jak na rysunku. Siatka jest wyskalowana w metrach, a masy poszczególnych punktów podane są w kilogramach. Zapisać wektor położenia środka masy.



3.80. Określić położenie środka masy przestrzennego układu punktów materialnych o współrzędnych i masach zamieszczonych w tabeli. Zapisać wektor położenia środka masy.

Punkt	x_i $[m]$	y_i $[m]$	z_i $[m]$	m_i $[kg]$
P_1	2	5	-8	12
P_2	-1	10	14	17
P_3	-9	-1	6	3
P_4	3	-7	-11	13
P_5	6	-12	-19	5
P_6	-13	-13	-3	22

3.81. Na rufie, stojącej na wodzie łodzi, znajduje się człowiek. Na jaką odległość przesunie się względem wody łódź, jeżeli człowiek przejdzie z rufy łodzi na jej dziób? Masa łodzi $M = 120\,\mathrm{kg}$, masa człowieka $m = 80\,\mathrm{kg}$, długość łodzi $l = 5\,\mathrm{m}$.

3.82. W jakiej odległości od środka Ziemi znajduje się środek masy układu Ziemi – Księżyc? Czy jest on jeszcze we wnętrzu Ziemi, czy na zewnątrz naszej planety? Dane:

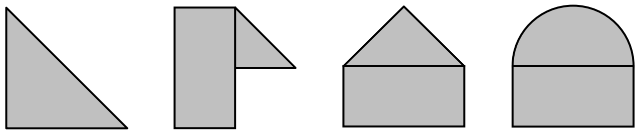
- Masa Ziemi: $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$,
- Masa Księżyca: $M_K \approx 7{,}3 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$,
- Średnia odległość Księżyca od Ziemi: $d \approx 3{,}84 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$,
- Średni promień Ziemi: $R_Z \approx 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$.

W jakiej odległości od Ziemi musiałby znajdować się Księżyc, aby środek masy układu znajdował się na powierzchni Ziemi?

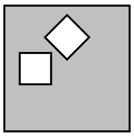
3.83. Znaleźć położenie środka masy dla układu czterech mas: $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 7\,\mathrm{kg}$, $m_4 = 1\,\mathrm{kg}$, rozmieszczonych w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 1\,\mathrm{m}$. Masy w wierzchołkach kwadratu rozmieścić samodzielnie.

3.84. Posługując się całkową definicją środka masy sprawdzić, że środek masy kwadratowej płyty o boku a leży w punkcie przecięcia się przekątnych płyty.

3.85. Znaleźć środki mas jednorodnych, płaskich płyt pokazanych na rysunku. Wymiary płyt oraz układ odniesienia xy dobrać samodzielnie.



3.86. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnej, kwadratowej płyty z wycięciami przedstawionymi na rysunku. Długość boku płyty wynosi $a = 20\,\mathrm{cm}$. Każde z kwadratowych wycięć ma bok o długości $b = 5\,\mathrm{cm}$. Środki tych wycięć znajdują się w odległości $r = 5\,\mathrm{cm}$ od środka płyty.



3.87. Znaleźć środek masy jednorodnego półokręgu o promieniu r.

3.88. Obliczyć współrzędne środka masy okrągłej płytki opisanej równaniem: $x^2 + y^2 \le a^2$, jeżeli jej gęstość w punkcie $P(x, y)$ jest proporcjonalna do odległości punktu P od punktu $A(x = -a,\ y = 0)$.

3.89. Znaleźć położenie środka masy stożka o wysokości h i promieniu podstawy r.

3.90. Znaleźć środek masy jednorodnej kuli o promieniu $R = 50\,\mathrm{cm}$, we wnętrzu której znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu $r = 10\,\mathrm{cm}$, przy czym środek kuli mniejszej oddalony jest o $d = 5\,\mathrm{cm}$,od środka kuli większej.