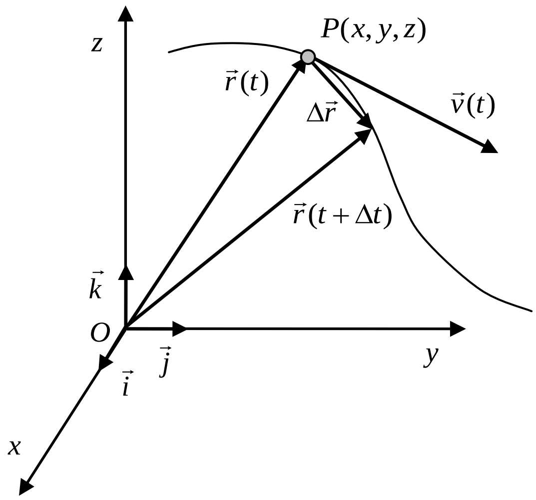
2. Kinematyka

Wektor położenia

Wektorem położenia lub wektorem wodzącym $\vec{r}$ punktu P nazywamy wektor, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych, natomiast koniec wyznacza położenie punktu P (Rys. 2.1.).



Rys. 2.1. Wektor położenia we współrzędnych kartezjańskich

Składowymi wektora położenia $\vec{r}$ są współrzędne x, y, z punktu P:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv [x \quad y \quad z], \tag{2.1}$$

a jego długość określa wyrażenie

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.2}$$

Gdy punkt P przemieszcza się w przestrzeni, to wektor wodzący $\vec{r}$, a zatem i jego składowe są funkcjami czasu.

Prędkość punktu

Prędkość chwilowa $\vec{v}$ punktu w ruchu postępowym zdefiniowana jest przez pochodną wektora wodzącego $\vec{r}$ po czasie:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \tag{2.3}$$

gdzie $\Delta\vec{r}$ jest zmianą wektora wodzącego w czasie Δt. Uwzględniając definicję (2.1), prędkość punktu możemy zapisać w postaci:

$$\vec{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z], \quad v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{2.4}$$

gdzie v jest długością wektora $\vec{v}$, natomiast

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

są składowymi wektora prędkości odpowiednio na kierunku x, y, z.

Prędkość średnia $\bar{\vec{v}}$ punktu w skończonym przedziale czasu Δt zdefiniowana jest przez stosunek zmiany wektora wodzącego $\Delta\vec{r}$ do czasu Δt, w którym ta zmiana nastąpiła:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Przyspieszenie punktu

Przyspieszenie chwilowe $\vec{a}$ punktu w ruchu postępowym zdefiniowane jest przez pochodną wektora prędkości $\vec{v}$ po czasie:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \tag{2.7}$$

Uwzględniając relacje (2.4), (2.5), przyspieszenie punktu możemy zapisać w postaci:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}, \quad a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2.8}$$

gdzie a jest długością wektora $\vec{a}$, natomiast

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.9}$$

są składowymi wektora przyspieszenia odpowiednio na kierunku x, y, z.

Droga

Drogą przebytą przez ciało jest suma elementarnych odcinków dróg $\mathrm{d}s$ przebytych w określonym odstępie czasu od t_0 do t:

$$s = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\vec{r}| = \int_{t_0}^{t} \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}_t|\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} v_t\,\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Ruch jednostajnie zmienny

W ruchu jednostajnie zmiennym ($\vec{a} = \mathrm{const}$) zależność prędkości $\vec{v}$ oraz wektora wodzącego $\vec{r}$ od czasu ma odpowiednio postać:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0), \tag{2.11}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 , \tag{2.12}$$

gdzie $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ i $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ wyznaczają odpowiednio prędkość punktu oraz jego położenie w początkowym momencie t_0. Równanie (2.12) zapisane w skalarnej postaci przedstawia zarazem parametryczny związek między współrzędnymi x, y, z określający tor trajektorii, po której porusza się punkt. Znajomość obydwu warunków początkowych umożliwia pełne rozwiązanie dowolnego zagadnienia kinematyki punktu poruszającego się ze stałym przyspieszeniem. W szczególności, powyższe równania można wykorzystać do opisu każdego przypadku ruchu ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym $\vec{g} = \mathrm{const}$ (rzut pionowy, spadek swobodny ciała, rzut poziomy, rzut ukośny).

Ruch obrotowy

W ruchu po okręgu, prędkość kątową ω oraz przyspieszenie kątowe ε definiują odpowiednio relacje:

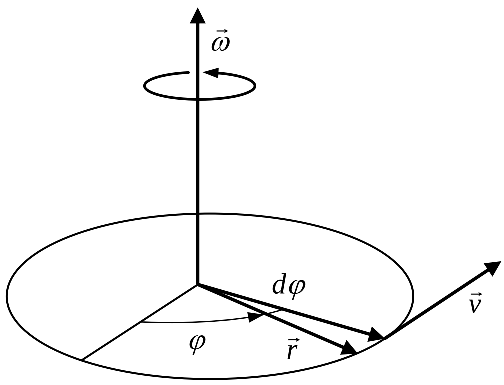
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} , \tag{2.13}$$

gdzie $\mathrm{d}\varphi$ jest drogą kątową zakreśloną przez promień wodzący punktu $\vec{r}$ w czasie $\mathrm{d}t$ (Rys. 2.2.). W ogólnym przypadku, prędkość kątową określa wektor $\vec{\omega}$ prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor wodzący $\vec{r}$ i wektor prędkości liniowej $\vec{v}$. Związek pomiędzy tymi wektorami ma postać iloczynu wektorowego:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \tag{2.14}$$

Relacja między przyspieszeniem liniowym $\vec{a}$ i przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$ ma postać:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} . \tag{2.15}$$



Rys. 2.2. Ilustracja wektora prędkości kątowej

Równania (2.14), (2.15), proste do udowodnienia dla ruchu po okręgu, pozostają prawdziwe dla dowolnego ruchu obrotowego, w którym prędkość liniowa, lokalny promień krzywizny trajektorii, orientacja i długość wektora prędkości kątowej oraz przyspieszenia kątowego ulegają w czasie ciągłej zmianie.

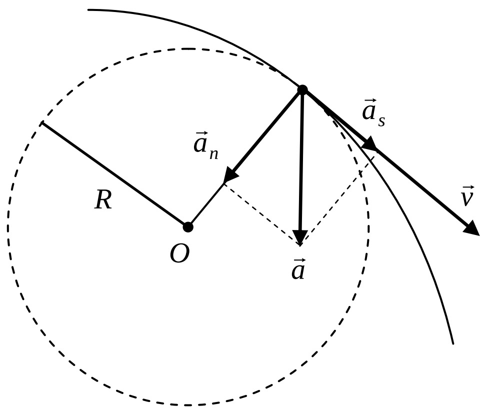
W ruchu jednostajnie zmiennym po okręgu, wyrażenia (2.11), (2.12), odniesione do prędkości kątowej ω i drogi kątowej φ, przyjmują odpowiednio postać:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0), \tag{2.16}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot (t - t_0)^2, \tag{2.17}$$

gdzie $\omega_0 = \omega(t_0)$ i $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ wyznaczają odpowiednio prędkość kątową punktu oraz jego położenie kątowe w początkowym momencie t_0.

Przyspieszenie styczne i normalne



Rys. 2.3. Rozkład przyspieszenia na przyspieszenie styczne i normalne

W ruchu prostoliniowym wektor przyspieszenia i wektor prędkości punktu jest styczny do trajektorii. Jeżeli trajektoria nie jest prostoliniowa, to wektor przyspieszenia $\vec{a}$ tworzy z wektorem prędkości liniowej $\vec{v}$ pewien kąt. Z wektora przyspieszenia wyodrębniamy wówczas tą jego składową $\vec{a}_s$, która jest związana ze zmianą wartości prędkości (przyspieszenie styczne) i składową $\vec{a}_n$ związaną ze zmianą kierunku wektora prędkości (przyspieszenie normalne):

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n, \tag{2.18}$$

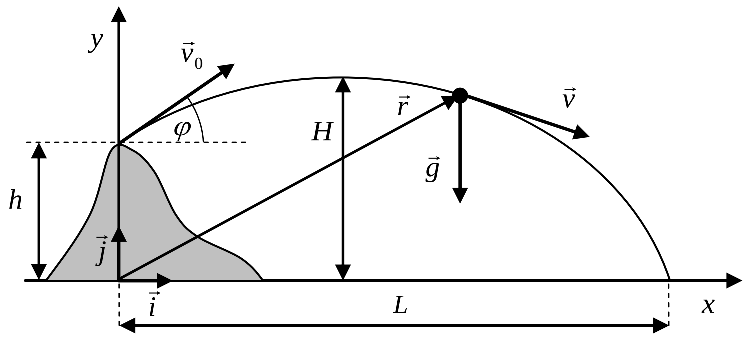
$$a_s = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2}, \tag{2.19}$$

gdzie R jest chwilowym promieniem lokalnej krzywizny trajektorii. Przyspieszenie normalne jest zorientowane do środka wpisanego w trajektorię okręgu i nosi nazwę przyspieszenia dośrodkowego.

Przykłady

Przykład 2.1. Ze wzgórza o wysokości $h = 20\,\mathrm{m}$ wystrzelono pod kątem $\varphi = 35°$ pocisk, którego początkowa prędkość wynosiła $v_0 = 200$ m/s. Obliczyć maksymalną wysokość H, na jaką wzniesie się pocisk, czas lotu t_L oraz jego zasięg L.

Rozwiązanie:



Przyjmując, że strzał został oddany w momencie $t_0 = 0$, znajdziemy położenie początkowe pocisku $\vec{r}_0 = [0 \quad h]$ oraz jego początkową prędkość $\vec{v}_0 = [v_0 \cos\varphi \quad v_0 \sin\varphi]$. Pocisk porusza się pod wpływem stałego przyspieszenia ziemskiego $\vec{g} = [0 \quad -g]$, więc jego prędkość $\vec{v}$ oraz położenie $\vec{r}$ będą określone przez równania (2.11), (2.12). Uwzględniając warunki początkowe znajdziemy:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2,$$

lub po rozpisaniu na składowe:

$$[v_x \quad v_y] = [v_0 \cos\varphi \quad v_0 \sin\varphi] + [0 \quad -g]t,$$

$$[x \quad y] = [0 \quad h] + [v_0 \cos\varphi \quad v_0 \sin\varphi]t + \frac{1}{2}[0 \quad -g]t^2.$$

Wektory są sobie równe, jeżeli ich składowe są sobie równe. Porównując odpowiednie składowe wektora prędkości i położenia otrzymamy:

$$v_x = v_0 \cos\varphi, \qquad v_y = v_0 \sin\varphi - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\varphi, \qquad y = h + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2.$$

Równania te pozwalają wyznaczyć poszukiwane wielkości. W najwyższym położeniu pocisku składowa prędkości $v_y = 0$, skąd czas, po którym zostanie osiągnięta ta wysokość wyniesie $t_H = v_0 \sin\varphi / g$. Maksymalne wzniesienie pocisku będzie więc równe:

$$H = y(t_H) = h + \frac{(v_0 \sin\varphi)^2}{2g}.$$

Czas lotu pocisku t_L określa warunek $y = 0$, który sprowadza się do równania kwadratowego:

$$\left(-\frac{1}{2}g\right)t_L^2 + (v_0 \sin\varphi)t_L + h = 0.$$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest poszukiwany czas

$$t_L = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}\,.$$

Zasięg lotu wyznacza równanie:

$$L = x(t_L) = v_0 t_L \cos\varphi\,.$$

Uwzględniając dane liczbowe otrzymamy: $H = 691\,\mathrm{m}$, $t_L = 23{,}6\,\mathrm{s}$, $L = 3860\,\mathrm{m}$.

Przykład 2.2. Bęben wirówki obraca się z częstotliwością $f_1 = 180\,\mathrm{Hz}$. Po odcięciu zasilania, bęben wykonuje $n = 530$ obrotów ruchem jednostajnie opóźnionym zmniejszając częstotliwość obrotów do $f_2 = 80\,\mathrm{Hz}$. Obliczyć czas hamowania, w którym następuje opisana redukcja obrotów i przyśpieszenie kątowe bębna. Obliczyć czas, po którym bęben się zatrzyma.

Rozwiązanie:

Ruch bębna odbywa się ze stałym przyspieszeniem kątowym. Czasową zależność prędkości kątowej ω i drogi kątowej φ pokonanej przez bęben opisują więc równania (2.16), (2.17). Przyjmując, że w momencie odcięcia zasilania $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 2\pi f_1$, znajdziemy:

$$\omega = 2\pi f_1 + \varepsilon t\,, \qquad \varphi = 2\pi f_1 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2\,,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym. Oznaczając czas hamowania przez τ, otrzymamy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi ε i τ:

$$\omega(\tau) = 2\pi f_2 = 2\pi f_1 + \varepsilon\tau\,, \qquad \varphi(\tau) = 2\pi n = 2\pi f_1 \tau + \frac{1}{2}\varepsilon\tau^2\,.$$

Rozwiązując powyższy układ równań znajdziemy:

$$\tau = \frac{2n}{f_1 + f_2}\,, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{n}\left(f_2^2 - f_1^2\right).$$

Czas τ_c, po którym bęben całkowicie się zatrzyma otrzymamy z warunku zerowania się prędkości kątowej: $\omega(\tau_c) = 2\pi f_1 + \varepsilon\tau_c = 0$, skąd

$$\tau_c = -2\pi\frac{f_1}{\varepsilon}\,.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy: $\tau = 4{,}1\mathrm{s}$, $\varepsilon = -154\,\mathrm{rad/s}$, $\tau_c = 7{,}2\mathrm{s}$

Przykład 2.3. Ciało porusza się pod wpływem siły hamującej z przyspieszeniem proporcjonalnym do jego prędkości: $a = -bv$, gdzie b jest dodatnim współczynnikiem hamowania. Znaleźć zależność prędkości v od czasu t oraz drogę s_c przebytą przez ciało do momentu jego zatrzymania. Przyjąć, że w momencie $t_0 = 0$, początkowa prędkość ciała i początkowa droga wynosiły odpowiednio $v(t_0) = v_0$ i $s(t_0) = s_0 = 0$.

Rozwiązanie:

Przyspieszenie ciała jest z definicji pochodną prędkości po czasie:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv .$$

Elementarna, względna zmiana prędkości ciała w czasie dt będzie więc określona relacją:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -b\,\mathrm{d}t .$$

Całkując obustronnie powyższy związek po czasie otrzymamy:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -b\int \mathrm{d}t \ , \qquad \ln v = -bt + C_1 ,$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Prawa część tego zapisu przedstawia uwikłaną zależność prędkości od czasu. W szczególności, równanie to spełnione jest dla momentu $t_0 = 0$, w którym prędkość ciała wynosi v_0. Umożliwia to znalezienie stałej całkowania $C_1 = \ln v_0$ i w konsekwencji - funkcyjnej zależności prędkości od czasu:

$$v(t) = v_0 e^{-bt} .$$

Elementarną droga ds przebytą przez ciało w elementarnym czasie dt przedstawia wyrażenie:

$$\mathrm{d}s = v(t)\mathrm{d}t = v_0 e^{-bt}\mathrm{d}t .$$

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymamy zależność drogi od czasu:

$$\int \mathrm{d}s = v_0 \int e^{-bt}\mathrm{d}t , \qquad s(t) = -\frac{v_0}{b} e^{-bt} + C_2 ,$$

gdzie C_2 jest stałą całkowania. W szczególności, równanie to spełnione jest dla momentu $t_0 = 0$, w którym przebyta droga $s(t_0) = s_0 = 0$. Warunek ten pozwala obliczyć stałą całkowania $C_2 = v_0 / b$ i w konsekwencji zależność drogi od czasu:

$$s(t) = \frac{v_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Z zależności prędkości ciała od czasu wynika, że prędkość ta spadnie do zera po czasie teoretycznie nieskończenie długim. Przebyta przez ciało droga od momentu $t_0 = 0$ do momentu zatrzymania będzie więc równa:

$$s_c = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) = \frac{v_0}{b} .$$

Zadania

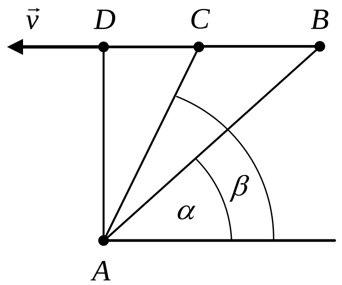
2.1. Samochód przebył z miasta A do miasta B drogę s jadąc z prędkością $v_1 = 50\,\text{km/h}$. W drodze powrotnej samochód jechał z prędkością $v_2 = 40\,\text{km/h}$. Obliczyć średnią prędkość samochodu.

2.2. Gdy dwa ciała A i B poruszają się ruchem jednostajnym po tej samej linii prostej, lecz w przeciwnych kierunkach, to odległość między nimi zwiększa się o $s_1 = 240\,\text{m}$ w czasie każdych $\Delta t_1 = 3\,\text{s}$. Jeżeli ciała z niezmienionymi prędkościami poruszają się w tą samą stronę, to odległość między nimi zwiększa się o $s_2 = 80\,\text{m}$ w ciągu każdych $\Delta t_2 = 4\,\text{s}$. Obliczyć prędkości v_A i v_B obu ciał.

2.3. Motorówka z włączonym silnikiem pokonuje odległość między przystanią A i B w czasie $t_1 = 3\,\text{h}$, płynąc z prądem rzeki. Płynąc w przeciwnym kierunku - pod prąd, motorówka pokonuje drogę między przystanią B i A w czasie $t_2 = 6\,\text{h}$. W jakim czasie t motorówka pokona dystans między przystaniami A i B dryfując z wyłączonym silnikiem?

2.4. Z łodzi motorowej, przepływającej pod mostem w górę rzeki, wypada kamizelka ratunkowa. Brak kamizelki zostaje zauważony przez szypra po czasie $t = 60\,\text{min}$. Wówczas szyper zawraca łódź i dogania kamizelkę w odległości $s = 5$ km od mostu. Jaka jest prędkość rzeki, jeżeli silnik łodzi pracował tak samo podczas ruchu w górę, jak i w dół rzeki?

2.5. Samolot leci ze stałą prędkością ponad szosą w kierunku do niej równoległym. Z punktu A na szosie zobaczono w pewnej chwili ten samolot w kierunku tworzącym z poziomem kąt $\alpha = 45°$. Po upływie czasu $t = 15\,\text{s}$ zobaczono go pod kątem $\beta = 60°$. Po upływie jakiego czasu od pierwszej obserwacji samolot znajdzie się ponad punktem A?



2.6. Pocisk poruszający się z prędkością $v = 500\,\text{m/s}$ wbija się w deskę na głębokość $s = 5\,\text{cm}$. Obliczyć czas wbijania się pocisku w deskę oraz opóźnienie jego ruchu zakładając, że ruch pocisku w desce jest jednostajnie opóźniony.

2.7. Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym. W czasie od momentu $t_1 = 6\,\text{s}$ do momentu $t_2 = 7\,\text{s}$ ciało przebyło drogę $s = 0{,}7\,\text{m}$. Jaka była prędkość ciała w momencie $t_3 = 10\,\text{s}$, jeżeli w chwili rozpoczęcia ruchu $(t_0 = 0)$ prędkość ciała była równa zeru?

2.8. Dwa ciała ruszają ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Stosunek ich przyśpieszeń wynosi 2:3, a stosunek czasów trwania ich ruchu wynosi 3:4. W jakim stosunku pozostają drogi przebyte przez te ciała?

2.9. Samochód jadący z prędkością $v_0 = 36\,\text{km/h}$ zaczął w pewnej chwili hamować tak, że zatrzymał się po przebyciu drogi $s = 100\,\text{m}$. Jakie jest opóźnienie ruchu a i jaką drogę s przebył samochód od chwili rozpoczęcia hamowania? Jaka była prędkość średnia w pierwszej i drugiej sekundzie hamowania?

2.10. Ciała A i B oddalone o $d = 25\,\mathrm{m}$ poruszają się wzdłuż prostej AB ruchem jednostajnie zmiennym. W chwili $t_0 = 0$ ciało A ma prędkość $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$ i przyśpieszenie $a_1 = 1{,}16\,\mathrm{m/s^2}$, a ciało B ma prędkość $v_2 = 5\,\mathrm{m/s}$ i przyśpieszenie $a_2 = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$. Po jakim czasie ciało A dogoni ciało B?

2.11. Dwaj rowerzyści jadą naprzeciwko siebie drogą biegnącą po stoku góry. W pewnym momencie zjeżdżający rowerzysta ma prędkość $v_1 = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ i przyśpieszenie $a_1 = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$. Podjeżdżający pod górę rowerzysta ma w tym samym momencie prędkość $v_2 = 12{,}5\,\mathrm{m/s}$ i opóźnienie $a_2 = 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$. W jakiej odległości rowerzyści byli od siebie, jeżeli spotkali się po czasie $t = 30\,\mathrm{s}$? Jak daleko może podjechać pod górę drugi rowerzysta?

2.12. Winda wjeżdża na wieżę telewizyjną o wysokości $h = 322\,\mathrm{m}$ w czasie $t = 60\,\mathrm{s}$. Pierwszą część drogi, do osiągnięcia prędkości $v = 7\,\mathrm{m/s}$, winda pokonuje ze stałym przyspieszeniem. Drugą część drogi winda przebywa ruchem jednostajnym, a trzecią – ruchem jednostajnie opóźnionym. Obliczyć przyspieszenie, z jakim winda rusza z miejsca przyjmując, że jest ono równe, co do wartości bezwzględnej, opóźnieniu podczas hamowania.

2.13. Obserwator stojący na peronie zauważył, że pierwszy wagon ruszającego przed nim ruchem jednostajnie przyspieszonym pociągu minął go w czasie $t_1 = 3\,\mathrm{s}$. Obliczyć całkowity czas t_n, w którym pociąg składający się z $n = 9$ wagonów minie obserwatora oraz czas Δt, w którym ostatni wagon minie obserwatora. Ile razy wzrosła prędkość pociągu w czasie Δt?

2.14. Motorówka przepłynęła z prędkością $v_w = 3\,\mathrm{m/s}$ (względem wody) rzekę, kierując się prostopadle do jej równoległych brzegów odległych od siebie o $s = 150\,\mathrm{m}$. W tym czasie prąd rzeki zniósł motorówkę na odległość $l = 75\,\mathrm{m}$. Obliczyć prędkość prądu rzeki v_p oraz całkowity czas t przeprawy motorówki przez rzekę.

2.15. Prędkość łodzi względem wody wynosi $v_w = 2\,\mathrm{m/s}$. Prędkość prądu rzeki $v_p = 1\,\mathrm{m/s}$. Jak należy sterować, aby przepłynąć rzekę prostopadle do brzegu? W jakim czasie łódź przepłynie rzekę o szerokości $d = 75\,\mathrm{m}$?

2.16. Samolot przebywa drogę $s = 1000\,\mathrm{km}$, lecąc z zachodu na wschód. Prędkość samolotu względem powietrza wynosi $v_p = 500\,\mathrm{km/h}$. Jaki jest czas przelotu w przypadku bezwietrznej pogody, oraz gdy podczas całego lotu wieje południowy wiatr z prędkością $v_w = 100\,\mathrm{km/h}$?

2.17. Ruchu ciała wzdłuż linii prostej opisuje równanie: $x = 4 + 2t + t^2 + 0{,}2t^3$. Obliczyć:

a) położenie punktu momentach $t_1 = 2s$ i $t_2 = 5s$,
b) prędkość średnią w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$,
c) prędkości chwilowe w momentach t_1 i t_2,
d) przyspieszenie średnie w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$,
e) przyspieszenie chwilowe w momentach t_1 i t_2.

2.18. Siła działająca na ciało o pewnej masie powoduje, że porusza się ono zgodnie z równaniem: $x = 1 + 2t - 3t^2 + 4t^3$. Jaka była średnia i chwilowa prędkość tego ciała po upływie $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ oraz $t_2 = 10\,\mathrm{s}$?

2.19. Ciało, początkowo spoczywające w początku układu współrzędnych, zaczyna porusza się ruchem niejednostajnie zmiennym z przyspieszeniem $a = b + ct$. Obliczyć prędkość ciała, położenie oraz przebytą przez ciało drogę po upływie $\mathrm{t = 6\,s}$, gdy:

a) $\mathrm{b = 2\,m/s^2}$, $\mathrm{c = 1\,m/s^3}$,

b) $\mathrm{b = 2\,m/s^2}$, $\mathrm{c = -1\,m/s^3}$.

2.20. Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się prostoliniowo dane jest równaniem:

a) $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$,

b) $a = 3t\ \mathrm{m/s^2}$,

c) $a = 3t^2\ \mathrm{m/s^2}$.

Obliczyć zależność drogi i prędkości od czasu oraz przedstawić je na wykresie. W chwili $t = 1s$ punkt ten znajdował się $3\,\mathrm{m}$ na prawo od początku układu współrzędnych i poruszał się z prędkością $3\,\mathrm{m/s}$ w lewo.

2.21. Ciało porusza się po linii prostej ze zmiennym przyspieszeniem $a = 3t^2$. W momencie $\mathrm{t = 2\,s}$ ciało znajdowało się w odległości $\mathrm{d = 10\,m}$ od początku układu odniesienia i miało prędkość $\mathrm{v = 10\,m/s}$. Jakie było średnie przyspieszenie i średnia prędkość w tym okresie?

2.22. Prędkość ciała opisana jest równaniem: $\vec{v} = [3t \quad 5\sin(\pi t) \quad 4\exp(3t)]\ \mathrm{m/s}$. Wyrazić wartość przyspieszenia, jako funkcję czasu t. Obliczyć wartość początkową przyspieszenia dla $t = 0$. Obliczyć wartości wektorów przyspieszenia średniego i chwilowego tego ciała w pierwszej sekundzie ruchu.

2.23. Położenie ciała zmienia się zgodnie z równaniem: $\vec{r} = \left[3t \quad 4 - 6t^2\right]$. Znaleźć wartości wektorów prędkości i przyspieszenia w chwili początkowej $t = 0$. Jaki kąt tworzyły wówczas te wektory między sobą?

2.24. Ruch punktu opisują dwa równania: $x = a_1 t^2 + b_1$ i $y = a_2 t^2 + b_2$, gdzie $a_1 = 0{,}2\,\mathrm{m/s^2}$, $a_2 = 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$, $b_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $b_2 = 0{,}03\,\mathrm{m}$. Wyznaczyć prędkość średnią oraz wartość i kierunek prędkości oraz przyspieszenia po upływie czasu $t = 5\,\mathrm{s}$.

2.25. Położenie ciała opisuje równanie: $x(t) = A\sin\left[0{,}5\pi\left(2t + t^3\right)\right]\mathrm{m}$. Obliczyć prędkość ciała v_1 po upływie pierwszej sekundy ruchu oraz średnią prędkość $\bar{v}$ w czasie tej sekundy. Prędkość początkowa ciała wynosiła $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$.

2.26. Wektor położenia ciała zmienia się zgodnie z równaniem: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, gdzie: $x(t) = at^2 + b$, $y(t) = ct + d$, $a = 8\,\mathrm{m/s^2}$, $b = 4\,\mathrm{m}$, $c = 2\,\mathrm{m/s}$, $d = 1\,\mathrm{m}$. Obliczyć prędkość średnią pomiędzy momentami $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 4\,\mathrm{s}$ ruchu oraz chwilowe prędkości w momentach t_1 i t_2. Jakie są wartości tych prędkości? Jakim ruchem porusza się to ciało wzdłuż osi x i y?

2.27. Zależność czasową prędkości ciała opisuje równanie $\vec{v}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j}$, gdzie $a = -2\,\mathrm{m/s^3}$, $b = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Ile wynosi prędkość tego ciała w chwilach $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 3\,\mathrm{s}$? Jaka jest prędkość średnia w tym przedziale czasu? Ile wynoszą chwilowe i średnie przyspieszenia?

2.28. Punkt materialny uczestniczy jednocześnie w dwóch ruchach opisanych równaniami: $x = at^2 + bt + c$, $y = 2at^2 - 4bt + 3c$. Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie tego punktu. W jakich jednostkach muszą być wyrażone stałe a, b, c?

2.29. Zbadać ruch punktu materialnego, który zmienia swoje położenie zgodnie z równaniem: $x = 5\cos(3t)$. W szczególności określić, jaki kąt tworzą ze sobą wektory położenia, prędkości i przyspieszenia w dowolnym momencie czasu. Powtórzyć obliczenia, gdy $x = 5\sin(3t)$.

2.30. Zbadać ruch punktu materialnego, który zmienia swoje położenie zgodnie z równaniami: $x = a\cos(\omega_1 t)$, $y = b\sin(\omega_2 t)$. Rozważyć przypadki:

a) $a = b = 2\,\mathrm{m}$, $\omega_1 = \omega_2 = 1/\mathrm{s}$,

b) $a = 2\,\mathrm{m}, b = 1\,\mathrm{m}$, $\omega_1 = 1/\mathrm{s}$, $\omega_2 = 2/\mathrm{s}$,

c) $a = 1\,\mathrm{m}, b = 2\,\mathrm{m}$, $\omega_1 = 3/\mathrm{s}$, $\omega_2 = 1/\mathrm{s}$.

2.31. Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się prostoliniowo dane jest równaniem: $a(t) = \pi\sin(\pi t)$. Jakie było początkowe położenie i prędkość tego punktu, jeżeli w pierwszej sekundzie ruchu spoczywało ono w początku układu odniesienia?

2.32. Prędkość ciała zmienia się w czasie zgodnie z równaniem: $\vec{v}(t) = 2t\vec{i} + 5\cos(\pi t)\vec{j} + 3\vec{k}$. Jaki kąt tworzyły wektory położenia i przyspieszenia w chwili początkowej, jeżeli w pierwszej sekundzie ruchu ciało miało położenie $\vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?

2.33. Położenie ciała zmienia się zgodnie z równaniem: $\vec{r}(t) = 5\sin(\pi t)\vec{i} + 5\cos(\pi t)\vec{j}$. Jaki jest kąt pomiędzy wektorem $\vec{r}$ i $\vec{v}$ oraz $\vec{r}$ i $\vec{a}$ w chwili początkowej $t = 0$, a jaki w pierwszej sekundzie ruchu?

2.34. Chłopiec o masie $m = 50\,\mathrm{kg}$ zeskakuje z płotu o wysokości $h = 2\,\mathrm{m}$. Jaka jest wartość i kierunek przyspieszenia, z jakim porusza się chłopiec w trakcie zeskoku? Czy w trakcie spadania chłopca na Ziemię, Ziemia również „spada” na chłopca? Jeśli tak, to jakie jest przyspieszenie Ziemi oraz jaką drogę przebędzie chłopiec i Ziemia zanim się zetkną? Masa Ziemi $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

2.35. Ciało spada z wysokości h. Obliczyć całkowity czas spadku i prędkość końcową ciała? Jak długo będzie trwał spadek do wysokości h/k, gdzie $k > 1$ i jaka będzie wówczas prędkość ciała?

2.36. Po wrzuceniu kamienia do studni, słychać po czasie $t = 3\,\mathrm{s}$ jak wpada on do wody. Jak głęboka jest studnia? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $v = 330\,\mathrm{m/s}$.

2.37. Ciało A spada swobodnie z wysokości $h = 160\,\mathrm{m}$. Z punktu leżącego o $\Delta h = 40\,\mathrm{m}$ wyżej rzucono jednocześnie ciało B, nadając mu taką prędkość początkową, że oba ciała spadły jednocześnie na ziemię. Obliczyć prędkość początkową ciała B.

2.38. Ciało spadające swobodnie ma w punkcie A prędkość $v_A = 10\,\mathrm{cm/s}$, a w punkcie B prędkość $v_B = 25\,\mathrm{cm/s}$. Określić odległość AB. Na jakiej wysokości nad punktem A znajduje się punkt, z którego ciało to zaczęło spadać?

2.39. Od rakiety wznoszącej się pionowo do góry, w chwili, gdy ma ona prędkość $v_0 = 400\,\mathrm{m/s}$, odrywa się na wysokości $h = 10\,\mathrm{km}$ jeden z niepotrzebnych już zbiorników paliwa. Znaleźć czas t, po którym zbiornik ten opadnie na ziemię. Jaka była maksymalna wysokość, na jakiej znajdował się zbiornik? Opory powietrza pominąć.

2.40. Ciało swobodnie spadające przebyło w ostatniej sekundzie drogę $s = 23{,}1\,\mathrm{m}$. Z jakiej wysokości spadło ciało?

2.41. Koszykarz wyskoczył pionowo na wysokość $1\,\mathrm{m}$. Ile czasu trwał cały skok? Jak długo koszykarz przebywał:

a) w szczytowych $10\,\mathrm{cm}$ i na dolnych $10\,\mathrm{cm}$,
b) w szczytowych $25\,\mathrm{cm}$ i na dolnych $25\,\mathrm{cm}$,
c) w szczytowych $50\,\mathrm{cm}$ i na dolnych $50\,\mathrm{cm}$?

2.42. Znaleźć największą wysokość h oraz zasięg s wyrzuconego z procy pod kątem $\alpha = 30^0$ względem poziomu kamienia. Początkowa prędkość kamienia $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$.

2.43. Pocisk o prędkości początkowej $v_0 = 750\,\mathrm{m/s}$ ma trafić w cel leżący na tym samym poziomie w odległości $d = 20\,\mathrm{km}$. Znaleźć kąt, pod jakimi należy wystrzelić pocisk oraz czas jego lotu.

2.44. Bramkarz wykopuje piłkę z prędkością v_p pod kątem α do poziomej murawy boiska. W momencie kopnięcia piłka znajduje się na wysokości h nad murawą boiska. Na jakiej wysokości y nad murawą boiska piłka przeleci nad zawodnikiem stojącym w odległości d od bramkarza.

2.45. Z jaką minimalna prędkością musi się wybić z miejsca student o masie $m = 70\,\mathrm{kg}$, aby przeskoczyć rów o szerokości $l = 3\,\mathrm{m}$?

2.46. Z wieży o wysokości $h = 125\,\mathrm{m}$ wyrzucono poziomo kamień. Jaka była początkowa prędkość kamienia, jeśli upadł on w odległości $s = 10\,\mathrm{m}$ od podstawy wieży? Jaka była jego prędkość końcowa?

2.47. Na poziomym stole leży wiatrówka. Na przeciwległej ścianie znajdującej się w odległości $d = 6\,\mathrm{m}$ od wylotu lufy oznaczono punkt leżący na przedłużeniu osi lufy. Wiatrówka wyrzuca pocisk z prędkością $v = 42\,\mathrm{m/s}$. W którym punkcie pocisk uderzy w ścianę?

2.48. Strzelec chce trafić do tarczy znajdującej się w odległości $d = 100\,\mathrm{m}$ z karabinu wystrzeliwującego pociski z prędkością $v = 500\,\mathrm{m/s}$. Pod jakim kątem musi być podniesiona względem poziomu lufa karabinu, aby kula trafiła w cel? Gdzie trafiłaby kula gdyby lufa była umieszczona poziomo?

2.49. Ze szczytu zbocza, nachylonego pod kątem $\varphi = 60°$ do poziomu, wystrzelono poziomo pocisk z prędkością v_0. Jaka powinna być prędkość tego pocisku, aby wpadł on do włazu bunkra znajdującego się w odległości $d = 200\,\mathrm{m}$ od szczytu?

2.50. Z podnóża wzniesienia nachylonego do poziomu pod kątem φ wystrzelono z armaty pocisk z prędkością początkową v_0, pod kątem α do poziomu. Znaleźć współrzędne x i y punktu, w którym pocisk uderzy w zbocze wzniesienia.

2.51. Z balonu na uwięzi, znajdującego się na wysokości $h = 375\,\mathrm{m}$, oddano strzał w górę pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu i jednocześnie oddano strzał w kierunku przeciwnym. Prędkość początkowa wystrzelonych pocisków była taka sama i wynosiła $v_0 = 70\,\mathrm{m/s}$. W jakiej odległości, jeden od drugiego, obydwa pociski spadną na ziemię?

2.52. Lotnik leci na wysokości $h = 200\,\mathrm{m}$ z prędkością $v = 1000\ \mathrm{km/h}$. Pod jakim kątem powinien on widzieć cel zwalniając bombę, by ta trafiła w cel?

2.53. Kusznik chce trafić w jabłko wiszące na drzewie. W jaki punkt powinien celować, jeżeli:
a) jabłko wisi na wysokości $2\,\mathrm{m}$, a drzewo jest w odległości $5\,\mathrm{m}$,
b) jabłko spada z drzewa w chwili strzału.

2.54. Samolot leci z prędkością $v = 500\,\mathrm{km/h}$ równolegle do ziemi na wysokości h. Gdy samolot znajdował się nad działem przeciwlotniczym, oddano strzał. Jakie powinno być nachylenie działa względem pionu oraz maksymalna wysokość, na jakiej leci samolot, aby pocisk wylatujący z działa z prędkością $v_1 = 200\,\mathrm{m/s}$ mógł trafić w samolot?

2.55. Dwie kule wyrzucono jednocześnie z tego samego miejsca ukośnie do poziomu pod kątami α_1 i α_2 i prędkościami początkowymi v_1 i v_2. W jakim odstępie czasu Δt przelecą one przez punkt, w którym przecinają się ich tory?

2.56. Dwa pociski wystrzelono jednocześnie z dwóch punktów odległych o $d = 100\,\mathrm{m}$. Pierwszy pocisk wystrzelono pod katem $\alpha_1 = 60°$ z prędkością $v_1 = 50\,\mathrm{m/s}$. Z jaką prędkością i pod jakim kątem powinien być wystrzelony drugi pocisk, by ich zderzenie nastąpiło w najwyższym punkcie obu torów?

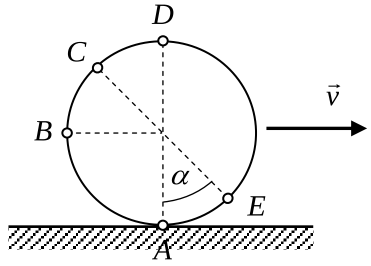
2.57. Samochód poruszający się ze stałą prędkością pokonuje pagórek, który w przekroju pionowym ma kształt koła o promieniu $20\,\mathrm{m}$. Na szczycie pagórka kierowca czuje, że zaczyna odrywać się od fotela. Z jaką prędkością porusza się ten samochód?

2.58. Węgiel transportowany jest taśmociągiem nachylonym pod kątem $\alpha = 60°$. Jaka powinna być prędkość ruchu tego taśmociągu, aby:
a) węgiel oderwał się od niego w punkcie styku z górną rolką prowadzącą,
b) węgiel po oderwaniu się od niego w punkcie styku z górną rolką prowadzącą więcej go już nie dotknął? Promień rolki $r = 20\,\mathrm{cm}$.

2.59. Piłka stacza się po stopniach schodów, których wysokość i głębokość są takie same i wynoszą $l = 25\,\mathrm{cm}$. Z jaką minimalną prędkością piłka opuściła górny stopień, jeżeli spadając nie dotknęła stopnia znajdującego się poniżej? W jakim punkcie spadła wówczas piłka na drugi stopień?

2.60. Piłka została wyrzucona poziomo ze szczytu schodów z prędkością $\mathrm{v} = 2\,\mathrm{m/s}$. Na który stopień poniżej górnego progu spadnie piłka, jeżeli wysokość stopnia jest równa jego głębokości i wynosi $l = 25\,\mathrm{cm}$?

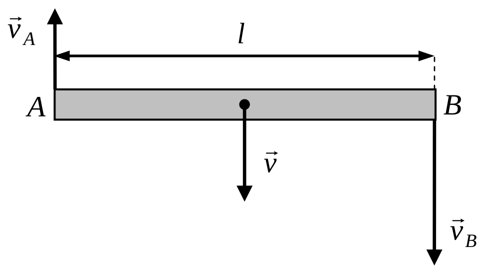
2.61. Rower porusza się prostoliniowo ze stałą prędkością v. Z jaką prędkością względem ziemi poruszają się punkty koła A, B, C, D i E zaznaczone na rysunku?



2.62. Punkty znajdujące się na obwodzie obracającego się dysku poruszają się z prędkością $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$, a punkty znajdujące się o $l = 10\,\mathrm{cm}$ bliżej osi poruszają się z prędkością $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$. Ile obrotów na minutę wykonuje ten dysk?

2.63. O jaki kąt obróci się bryła sztywna w czasie $t = 150\,\mathrm{ms}$, jeżeli obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega = 300\,\mathrm{rad/s}$?

2.64. Jednorodny pręt długości $l = 1{,}6\,\mathrm{m}$ porusza się ruchem postępowym z prędkością $v = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$ oraz ruchem obrotowym wokół środka masy z prędkością kątową $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$. Obliczyć prędkości liniowe obu końców pręta.



2.65. Bryła obracająca się początkowo z prędkością kątową $\omega_0 = 30\,\mathrm{rad/s}$, obróciła się w czasie $t = 2\,\mathrm{s}$ o kąt $\varphi = 40\,\mathrm{rad}$. Oblicz prędkość kątową bryły po tym czasie przyjmując, że ruch był jednostajnie zmienny.

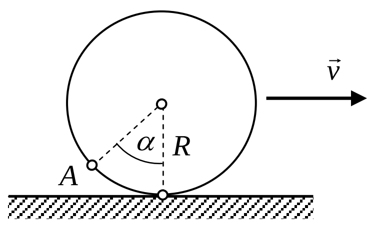
2.66. Wrzeciono obrabiarki zaczyna obracać się ruchem jednostajnie przyśpieszonym i w ciągu pierwszych $t = 4\,\mathrm{s}$ wykonuje $n = 360$ obrotów. Obliczyć przyśpieszenie kątowe wrzeciona i jego prędkość kątową po czasie $t = 4\,\mathrm{s}$.

2.67. Bęben wirówki obracający się z częstotliwością $f = 200\,\mathrm{Hz}$ wykonuje $n = 600$ obrotów ruchem jednostajnie opóźnionym do chwili zatrzymania. Oblicz czas hamowania i przyśpieszenie kątowe bębna.

2.68. Koło zamachowe, wykonujące początkowo $n = 240$ obrotów w ciągu minuty, zatrzymało się w ciągu $t = 30\,\mathrm{s}$. Ile obrotów wykonało koło w tym czasie, jeśli poruszało się ruchem jednostajnie opóźnionym?

2.69. Rowerzysta ruszający rowerem jedzie w czasie $t = 20\,\mathrm{s}$ ze stałym przyspieszeniem. Jaką prędkość osiągnie rowerzysta po upływie tego czasu, jeżeli promień kół w rowerze wynosi $r = 0{,}3\,\mathrm{m}$, a ich przyśpieszenie kątowe $\varepsilon = 0{,}6\,\mathrm{rad/s^2}$?

2.70. Spod koła samochodu poruszającego się z prędkością v wyleciał kamyk. Na jaką wysokość h nad powierzchnię drogi wzniesie się kamyk, jeżeli oderwał się on w punkcie A zaznaczonym na rysunku?



2.71. Koło o promieniu $r = 10\,\text{cm}$ obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 3{,}14\,\text{rad/s}^2$. Obliczyć prędkość kątową, liniową, przyspieszenie styczne, normalne i całkowite punktów leżących na obwodzie koła w drugiej sekundzie ruchu.

2.72. Punkt zatacza okrąg o promieniu $r = 10\,\text{cm}$ z przyśpieszeniem dośrodkowym $a = 250\,\text{cm/s}^2$. Obliczyć okres tego ruchu.

2.73. Ile razy na minutę musi ruchomy punkt zatoczyć okrąg o promieniu $r = 15\,\text{cm}$, aby przyśpieszenie dośrodkowe tego ruchu osiągnęło wartość $a = 60\,\text{cm/s}^2$?

2.74. Koło zamachowe zwiększa prędkość kątową z $\omega_1 = 20\,\text{rad/s}$ do $\omega_2 = 24\,\text{rad/s}$ w czasie $\Delta t = 4\,\text{s}$. Oblicz przyśpieszenie styczne punktów koła w odległości $r = 6\,\text{cm}$ od osi obrotu.

2.75. Punkt materialny porusza się po obwodzie okręgu o promieniu $r = 1\,\text{m}$ ze stałym przyspieszeniem stycznym. Jaka będzie wartość przyspieszenia dośrodkowego w chwili $t_1 = 5\,\text{s}$, jeżeli w chwili $t_2 = 10\,\text{s}$ punkt pokona drogę $s = 50\,\text{m}$?

2.76. Punkty A i B zataczają okręgi o promieniach r i R. W jakim stosunku są okresy ich ruchu, jeżeli przyśpieszenia dośrodkowe są równe?.

2.77. Punkt materialny porusza się po obwodzie okręgu o promieniu $r = 20\,\text{cm}$ z przyspieszeniem stycznym $a_s = 5\,\text{cm/s}^2$. Po jakim czasie t od chwili rozpoczęcia ruchu, przyspieszenie normalne a_n będzie $n = 2$ razy większe od przyspieszenia stycznego?

2.78. Ile wynosi stosunek wartości przyspieszenia dośrodkowego do wartości przyspieszenia stycznego a_n / a_s, jeżeli kąt pomiędzy kierunkiem wektora przyspieszenia wypadkowego a kierunkiem wektora prędkości liniowej wynosi $\alpha = 30°$?

2.79. Jaka jest wartość prędkości liniowej v oraz składowej przyspieszenia dośrodkowego a_n ciał znajdujących się na powierzchni Ziemi, wynikających z jej ruchu obrotowego? Obliczenia wykonać dla ciał znajdujących się:

a) na równiku,
b) na szerokości geograficznej $\varphi = 60°$.

Promień Ziemi $R_Z = 6370\,\text{km}$.

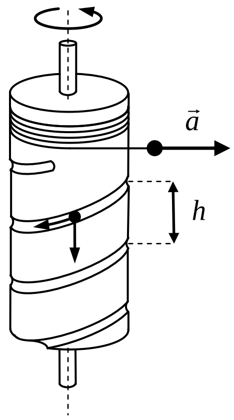
2.80. Samochód wjeżdża w zakręt o długości $s = 600\,\text{m}$ i promieniu krzywizny $r = 1\,\text{km}$ z prędkością $v_0 = 54\,\text{km/h}$ i pokonuje go w czasie $t = 30\,\text{s}$. Obliczyć prędkość v oraz przyspieszenie wypadkowe a po pokonaniu zakrętu.

2.81. Rowerzysta porusza się po torze kołowym o promieniu r. Przyspieszenie liniowe rowerzysty wynosi a. Po jakim czasie t przyspieszenie dośrodkowe a_n będzie, co do wartości, równe przyspieszeniu stycznemu a_s? W momencie $t = 0$ prędkość początkowa rowerzysty wynosiła $v_0 = 0$.

2.82. Motocyklista porusza się po okręgu o promieniu $r = 50\,\text{m}$. Przebyta przez niego droga określona jest równaniem: $s = 10t - 0{,}2t^2$. Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie styczne, normalne i wypadkowe motocyklisty w $t_1 = 5\,\text{s}$ ruchu.

2.83. Przyspieszenie normalne punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu $r = 4\,\mathrm{m}$ jest funkcją czasu: $a_n = 1 + 2t + 3t^2$. Wyznaczyć przyspieszenie styczne tego punktu po czasie $t_1 = 6\,\mathrm{s}$.

2.84. W gwint o skoku h znajdujący się na walcu o średnicy d włożono kulkę o masie m. Z jakim przyspieszeniem a należy ciągnąć za nić obracającą walec, aby kulka opadała swobodnie?



2.85. Na śrubie o średnicy d i skoku h znajduje się nakrętka. Z jakim przyspieszeniem kątowym ε należy obracać śrubę, aby nakrętka opadała swobodnie?