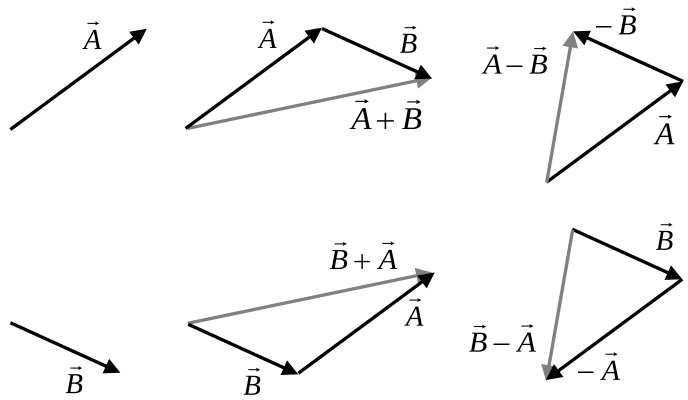
1. Podstawy rachunku wektorowego

Wektor

Wektor jest wielkością zdefiniowaną przez długość (moduł), kierunek działania oraz zwrot. Dwa wektory o tym samym module, kierunku i zwrocie są sobie równe. Wektor przesunięty równolegle w przestrzeni pozostaje tym samym wektorem. Przykładem wielkości wektorowej jest prędkość, przyspieszenie, siła, moment siły, pęd, moment pędu.

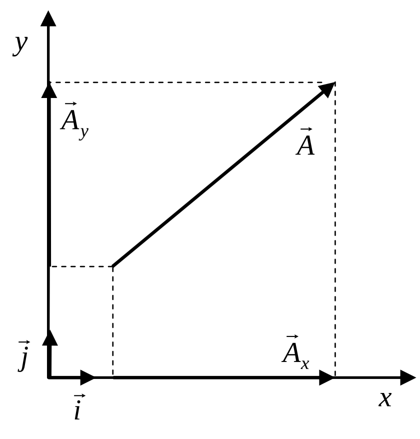
Dodawanie i odejmowanie wektorów

Aby graficznie dodać dwa wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, przesuwamy równolegle jeden z nich, np. wektor $\vec{B}$ tak, by jego początek pokrył się z końcem drugiego wektora (wektora $\vec{A}$). Sumę wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ tworzy wektor łączący początek wektora $\vec{A}$ z końcem przesuniętego wektora $\vec{B}$. Procedurę tą możemy stosować do większej liczby wektorów, a kolejność ich równoległego przemieszczania jest dowolna. Aby graficznie odjąć dwa wektory możemy wykorzystać procedurę graficznego dodawania zastępując wektor odejmowany wektorem przeciwnie do niego zorientowanym (Rys. 1.1.).



Rys. 1.1. Graficzne dodawanie i odejmowanie wektorów

Rozkład wektora na składowe



Rys. 1.2. Rozkład wektora na składowe w układzie współrzędnych prostokątnych

Dowolny wektor możemy zapisać w postaci sumy jego rzutów na osie układu współrzędnych:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \equiv \begin{bmatrix} A_x & A_y \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}$ są jednostkowymi wektorami (wersorami) o kierunkach i zwrotach pokrywających się z kierunkami i zwrotami osi x, y (Rys. 1.2.). W układzie trójwymiarowym wyrażenie (1.1) przyjmuje postać:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \equiv \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

gdzie $\vec{k}$ jest wersorem osi z.

Wektory rozłożone na składowe dodajemy lub odejmujemy dodając lub odejmując ich odpowiednie składowe:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \begin{bmatrix} A_x \pm B_x & A_y \pm B_y & A_z \pm B_z \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest skalar określony przez wyrażenie:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\varphi, \tag{1.5}$$

gdzie

$$A \equiv \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \tag{1.6}$$

$$B \equiv \left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \tag{1.7}$$

są długościami wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ zorientowanych względem siebie pod kątem φ (Rys. 1.3.). Iloczyn skalarny można również obliczyć sumując iloczyny odpowiednich składowych wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

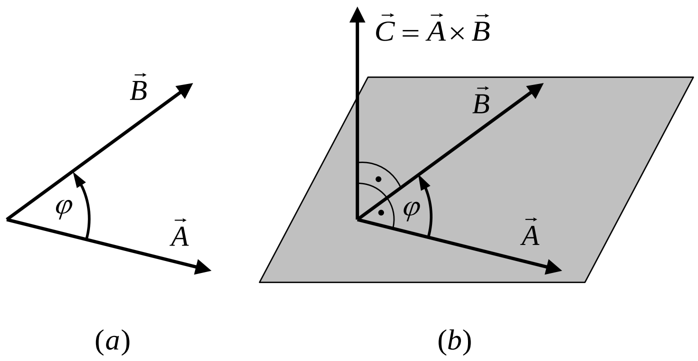
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{1.8}$$

Przykładem iloczynu skalarnego jest praca mechaniczna, zdefiniowana jako iloczyn skalarny siły $\vec{F}$ i przesunięcia $\vec{s}$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\varphi. \tag{1.9}$$

Powyższa relacja jest poprawna przy założeniu, że w każdym punkcie drogi wektor siły ma tą samą długość i jest zorientowany względem przesunięcia pod tym samym kątem. W ogólnym przypadku pracę, którą wykonuje pole siłowe $\vec{F}$ przemieszczając punkt wzdłuż dowolnej trajektorii z punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ do punktu $P(x, y, z)$ określa wyrażenie:

$$L_{P_0 \to P} = \int\limits_{P_0 \to P} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{x_0}^{x} F_x \mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} F_y \mathrm{d}y + \int\limits_{z_0}^{z} F_z \mathrm{d}z \,. \tag{1.10}$$



Rys. 1.3. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego (a) i wektorowego (b)

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ nazywamy wektor

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \,, \tag{1.11}$$

o długości

$$C = AB \sin \varphi \tag{1.12}$$

i orientacji wyznaczonej przez prostą prostopadłą do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Zwrot wektora $\vec{C}$ wyznacza *reguła śruby prawej* (Rys.1.3.). Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ można także przedstawić w równoważnej postaci:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left[A_y B_z - A_z B_y \quad A_z B_x - A_x B_z \quad A_x B_y - A_y B_x \right]. \tag{1.13}$$

W odróżnieniu od iloczynu skalarnego, iloczyn wektorowy nie jest przemienny:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \,. \tag{1.14}$$

Przykładem iloczynu wektorowego jest moment siły $\vec{M}$ i moment pędu $\vec{L}$ zdefiniowany, jako iloczyn wektorowy wektora położenia (ramienia) $\vec{r}$ oraz odpowiednio wektora siły $\vec{F}$ i wektora pędu $\vec{p}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{1.15}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \,. \tag{1.16}$$

Powyższe definicje określają momenty obydwu wielkości fizycznych względem punktu wyznaczonego przez początek wektora $\vec{r}$.

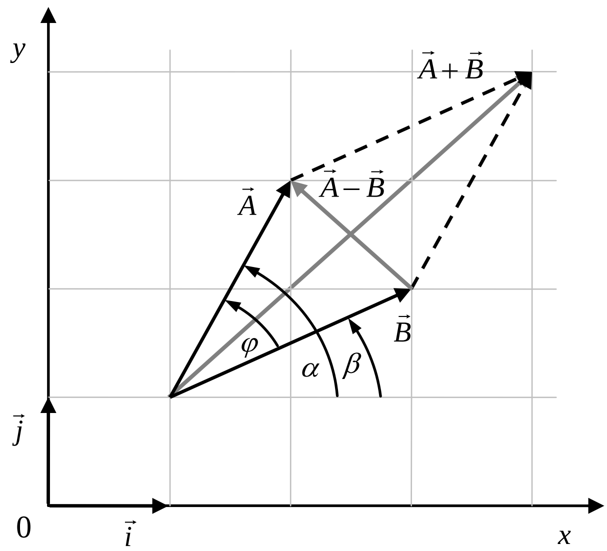
Przykłady

Przykład 1.1. Dane są dwa wektory: $\vec{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ i $\vec{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$.

a) Znaleźć sumę i różnicę obydwu wektorów metodą graficzną. Obliczyć iloczyn skalarny i wektorowy tych wektorów posługując się definicjami obydwu iloczynów ujętymi odpowiednio w formułach (1.5) i (1.11), (1.12).

b) Znaleźć sumę, różnicę oraz iloczyn skalarny i wektorowy obydwu wektorów posługując się odpowiednio relacjami (1.4) oraz (1.8) i (1.13). Porównać wyniki działań z rezultatami otrzymanymi w punkcie a).

Rozwiązanie:



a) Suma i różnica wektorów otrzymana z graficznego dodawania i odejmowania wektorów metodą równoległoboku wynosi:

$$\vec{A}+\vec{B}=\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}, \quad \vec{A}-\vec{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.$$

Długości wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są odpowiednio równe:

$$A=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}, \quad B=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

Kąty α,β,φ wyznaczone są przez relacje:

$$\tan\alpha=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha=63{,}435^\circ,$$
$$\tan\beta=0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta=26{,}565^\circ,$$
$$\varphi=\alpha-\beta=36{,}870^\circ, \quad \cos\varphi=0{,}8, \quad \sin\varphi=0{,}6\ .$$

Zgodnie z definicją iloczynu skalarnego (1.5) znajdziemy:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\varphi=\sqrt{5}\sqrt{5}\cos 36{,}870^\circ=4\,.$$

Iloczyn wektorowy obydwu wektorów definiują równania (1.11), (1.12):

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C\left(-\vec{k}\right) = -3\vec{k}\,, \qquad C = AB\sin\varphi = \sqrt{5}\sqrt{5}\sin 36{,}870^\circ = 3\,.$$

Znak *minus* przy wersorze $\vec{k}$ wynika z przyjętej w definicji iloczynu wektorowego *reguły śruby prawej.*

b) Sumę i różnicę obydwu wektorów znajdziemy sumując i odejmując odpowiednie ich składowe - zgodnie z relacją (1.4):

$$\vec{A} + \vec{B} = \left[A_x + B_x \quad A_y + B_y\right] = \left[3 \quad 3\right],$$
$$\vec{A} - \vec{B} = \left[A_x - B_x \quad A_y - B_y\right] = \left[-1 \quad 1\right].$$

Iloczyn skalarny określa równanie (1.8):

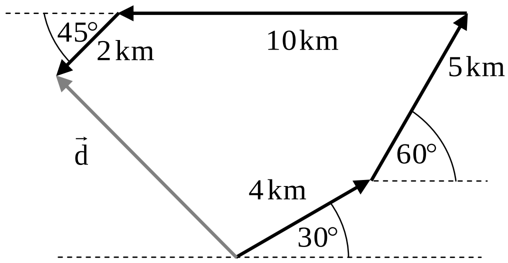
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4\,.$$

Iloczyn wektorowy (1.13) przyjmie postać:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left[A_y B_z - A_z B_y \quad A_z B_x - A_x B_z \quad A_x B_y - A_y B_x\right] =$$
$$= \left[2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \quad 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \quad 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2\right] = \left[0 \quad 0 \quad -3\right] = -3\vec{k}\,.$$

Wyniki działań na obydwu wektorach w punkcie a) i b) są więc identyczne.

Przykład 1.2. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego przemieszczenia ciała, jeżeli przemieszczenia składowe są takie jak na rysunku?



Rozwiązanie:

Wektory składowe przemieszczenia wynoszą odpowiednio:

$$\vec{d}_1 = \left[4\cos 30^\circ \quad 4\sin 30^\circ\right], \qquad \vec{d}_2 = \left[5\cos 60^\circ \quad 5\sin 60^\circ\right],$$
$$\vec{d}_3 = \left[10\cos 180^\circ \quad 10\sin 180^\circ\right], \qquad \vec{d}_4 = \left[2\cos 225^\circ \quad 2\sin 225^\circ\right]\,.$$

Wartość i kierunek wypadkowego przemieszczenia ciała określa wektor:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 = \left[5{,}4501 \quad 4{,}9159\right].$$

Z relacji wiążących współrzędne kartezjańskie i współrzędne biegunowe:

$$d_x = d\cos\varphi\,, \qquad d_y = d\sin\varphi$$

wynika, że:

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-5.4501)^2 + 4.9159^2} = 7{,}3396\,\text{km} \approx 7{,}3\,\text{km},$$

$$\varphi = \arccos\frac{d_x}{d} = \arccos\left(\frac{-5{,}4501}{7{,}3396}\right) = 137{,}95° \approx 138°.$$

Przykład 1.3. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są trzy wektory: $\vec{A} = [3 \quad \lambda \quad -2]$, $\vec{B} = [-\lambda \quad 4 \quad 2]$, $\vec{C} = \left[-3 \quad 2 \quad 3 + \frac{\lambda}{6}\right]$. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Rozwiązanie:

Obliczamy iloczyn wektorowy $\vec{A} \times \vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & \lambda & -2 \\ -\lambda & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2\lambda + 8) + \vec{j}\,(2\lambda - 6) + \vec{k}\,(12 + \lambda^2) =$$

$$= [2\lambda + 8 \quad 2\lambda - 6 \quad 12 + \lambda^2].$$

Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, jak każda para wektorów, leżą w jednej płaszczyźnie, do której zorientowany jest prostopadle wektor $\vec{A} \times \vec{B}$. Wektor $\vec{C}$ będzie leżał w tej samej płaszczyźnie, jeżeli będzie zorientowany prostopadle do wektora $\vec{A} \times \vec{B}$. Wektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ będą więc leżały w jednej płaszczyźnie, jeżeli spełniony zostanie warunek: $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$. Warunek ten ma postać:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \left[-3 \quad 2 \quad 3 + \frac{\lambda}{6}\right] \cdot [2\lambda + 8 \quad 2\lambda - 6 \quad 12 + \lambda^2] = -3 \cdot (2\lambda + 8) +$$

$$+ 2 \cdot (2\lambda - 6) + \left(3 + \frac{\lambda}{6}\right) \cdot (12 + \lambda^2) = \frac{1}{6}\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są wartości $\lambda = 0$ oraz $\lambda = -18$. Sprawdzić, że dla znalezionych wartości λ spełnione są także relacje: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$, $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = 0$.

Zadania

1.1. Dane są wektory: $\vec{A} = [3 \quad 4]$ i $\vec{B} = [2 \quad -5]$. Znaleźć wartości i kierunki następujących wektorów: $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{B} - \vec{A}$, $2\vec{A} - 3\vec{B}$. Przedstawić te działania graficznie.

1.2. Obliczyć algebraicznie oraz wyznaczyć graficznie sumę trzech wektorów: $\vec{A} = [3 \quad 4]$, $\vec{B} = [4 \quad -3]$, $\vec{C} = [-5 \quad 0]$.

1.3. Dane są dwa wektory: $\vec{A} = [2 \quad 3 \quad 4]$, $\vec{B} = [2 \quad -5 \quad -2]$. Jakie są składowe wektora $\vec{C}$, jeżeli $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = [1 \quad 2 \quad 3]$?

1.4. Dane są dwa wektory $\vec{A}=[3 \quad 2]$ i $\vec{B}=[-1 \quad 5]$. Jakie są współrzędne wektora $\vec{C}$, jeżeli $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$?

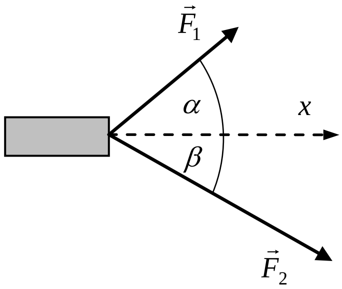
1.5. Jakie są składowe wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$, jeżeli: $\vec{A}-\vec{B}=2\vec{C}$, $\vec{A}+\vec{B}=4\vec{C}$, $\vec{C}=[3 \quad 4]$?

1.6. Podróżnik przeszedł $7\ \mathrm{km}$ w kierunku północno-wschodnim. Jak daleko powinien iść na południe, a następnie na zachód, aby wrócić do punktu wyjścia?

1.7. Statek przepłynął $15\ \mathrm{mil}$ morskich kursem $20°$, następnie $10\ \mathrm{mil}$ kursem $70°$ oraz $5\ \mathrm{mil}$ kursem $130°$. Jak daleko i jakim kursem statek musi płynąć, aby wrócić do punktu startu?

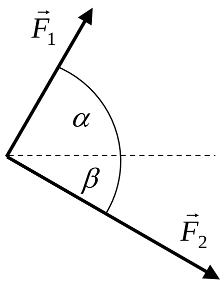
1.8. Na ciało działają dwie siły. Siła $\vec{F}_1$ ma wartość $F_1 = 7\ \mathrm{N}$ i jest skierowana pod kątem $\varphi = 40^\circ$ względem osi x. Druga siła $\vec{F}_2$ ma wartość $F_2 = 5\ \mathrm{N}$ i zwrot zgodny ze zwrotem osi y. Wyznaczyć graficznie i algebraicznie wartość oraz kierunek siły wypadkowej.

1.9. Skrzynia jest ciągnięta przez dwie osoby za pomocą lin. Jedna osoba ciągnie siłą $F_1 = 20\ \mathrm{N}$ pod kątem $\alpha = 40°$. Z jaką siłą ciągnie linę druga osoba, jeżeli lina naprężona jest pod kątem $\beta = 30°$, a skrzynia porusza się wzdłuż osi x? Jaka jest wypadkowa siła, z jaką działają obie osoby? Tarcie pominąć.



1.10. Gdyby siła $\vec{F}_2$ z poprzedniego zadania miała tą samą wartość, co siła $\vec{F}_1$, to jaką dodatkową siłę i w jakim kierunku należałoby przyłożyć do skrzyni, aby poruszała się ona cały czas ruchem jednostajnym wzdłuż osi x?

1.11. Na ciało działają trzy siły: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i nieznana siła $\vec{F}_3$. Jaka jest wartość i kierunek działania nieznanej siły, jeżeli te trzy siły równoważą się? Dane: $F_1 = 5\ \mathrm{N}$, $F_2 = 7\ \mathrm{N}$, $\alpha = 60^\circ$. $\beta = 30^\circ$.



1.12. Dane są dwa wektory: $\vec{A}=[0 \quad 2]$, $\vec{B}=[-5 \quad 3]$. Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{A}\cdot\vec{B}$ oraz kąt pomiędzy wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

1.13. Obliczyć długości wektorów $\vec{A}=[3 \quad -4 \quad 7]$ i $\vec{B}=[-5 \quad 3 \quad 0]$. Jaki jest kąt φ pomiędzy tymi wektorami?

1.14. Pokazać, że wektory $\vec{A}=[9 \quad 1 \quad -4]$ i $\vec{B}=[3 \quad -7 \quad 5]$ są wzajemnie prostopadłe.

1.15. Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ mają odpowiednio długości $A=4$ i $B=5$. Jaki jest kąt pomiędzy tymi wektorami, jeżeli:

a) $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$,
b) $\vec{A}\cdot\vec{B}=20$,
c) $\vec{A}\cdot\vec{B}=-20$?

1.16. Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ mają początki w początku układu współrzędnych, a końce odpowiednio w punktach o współrzędnych biegunowych $[7 \quad 70°]$ i $[4 \quad 130°]$. Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

1.17. Wektor $\vec{A}$ ma długość $A=5$ i zwrot zgodny z kierunkiem osi y. Wektor $\vec{B}=[5 \quad 3 \quad 0]$. Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Jaki jest kąt pomiędzy tymi wektorami?

1.18. Obliczyć kąt pomiędzy wektorami $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, jeżeli wiadomo, że wektory $\vec{A}=2\vec{P}+\vec{Q}$ i $\vec{B}=-4\vec{P}+5\vec{Q}$ są wzajemnie prostopadłe, oraz że $P=Q$.

1.19. Jaka jest składowa wektora $\vec{A}=[3 \quad 2]$ w kierunku wektora jednostkowego $\vec{u}=[4/5 \quad 3/5]$?

1.20. Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}=[3 \quad 2 \quad -1]$ oraz $\vec{B}=[-1 \quad -2 \quad -3]$.

1.21. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory: $\vec{A}=[1 \quad 2 \quad 3]$, $\vec{B}=[-1 \quad 1 \quad 0]$. Obliczyć:

a) długość każdego z wektorów,
b) iloczyn skalarny $\vec{A}\cdot\vec{B}$ i $\vec{B}\cdot\vec{A}$,
c) iloczyn wektorowy $\vec{A}\times\vec{B}$ i $\vec{B}\times\vec{A}$,
d) kąt zawarty między wszystkimi czterema wektorami.

1.22. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory: $\vec{A}=[2 \quad 3 \quad -3]$ oraz $\vec{B}=[1 \quad 2 \quad 3]$. Znaleźć:

a) długość każdego wektora,
b) iloczyn skalarny $\vec{A}\cdot\vec{B}$,
c) kąt zawarty między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$,
d) sumę i różnicę wektorów: $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$,
e) iloczyn wektorowy $\vec{A}\times\vec{B}$,
f) wektor $\vec{C}$ taki, że $2\vec{A}-3\vec{B}+\vec{C}\cdot\left[(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{B}\right]=0$.

1.23. Wektor $\vec{A}$ ma długość $A=5$ i leży w płaszczyźnie xy pod kątem $\varphi=120°$ względem osi x. Wektor $\vec{B}$ ma długość $B=3$ oraz kierunek i zwrot zgodny z osią z. Obliczyć iloczyn skalarny oraz iloczyn wektorowy tych wektorów.

1.24. Dane są dwa wektory: $\vec{A}=\begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}$, $\vec{B}=\begin{bmatrix}B_x & B_y & B_z\end{bmatrix}$. Dokonując mnożenia - wyraz po wyrazie i korzystając z definicji iloczynu skalarnego oraz definicji iloczynu wektorowego udowodnić, że:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}A_yB_z-A_zB_y & A_zB_x-A_xB_z & A_xB_y-A_yB_x\end{bmatrix}.$$

1.25. Kąt φ, to kąt pomiędzy wektorami $\vec{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\end{bmatrix}$ i $\vec{B}=\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$. Opierając się na definicji iloczynu skalarnego i wektorowego, obliczyć wartość *sinusa* i *cosinusa* tego kąta. Sprawdzić, że $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

1.26. Wektor $\vec{A}$ jest skierowany przeciwnie do osi y, a wektor $\vec{B}$ przeciwnie do osi x. Jaki jest kierunek i zwrot wektora $\vec{A}\times\vec{B}$? Jaki jest kierunek i zwrot wektora $\vec{B}\times\vec{A}$?

1.27. Wektor $\vec{A}$ skierowany jest zgodnie ze zwrotem osi x i ma długość $A=5$, natomiast wektor $\vec{B}$ ma zwrot przeciwny do osi y i długość $B=3$. Jaki jest kierunek i długość wektora $\vec{A}+\vec{B}$ i wektora $\vec{A}-3\vec{B}$?

1.28. Obliczyć iloczyny wektorowe: $\vec{C}\times\vec{A}$, $\vec{C}\times\vec{B}$, jeżeli $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$.

1.29. Wyznaczyć kąty pomiędzy wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$, gdy:

a) $2\vec{A}+3\vec{B}=0$,
b) $|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{A}+\vec{B}|$,
c) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{A}=\vec{B}\times(\vec{B}\times\vec{A})$.

1.30. Jaki jest kąt pomiędzy wektorem $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$, a osiami x, y, z, jeżeli $\vec{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $\vec{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$? Jaką długość mają poszczególne wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$?

1.31. Znaleźć wszystkie wektory o długości jednostkowej leżące w płaszczyźnie $x\,y$ i prostopadłe do wektora $\vec{r}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$.

1.32. Wykazać, że wektor $\vec{A}$ jest prostopadły do wektora $\vec{B}$, jeżeli $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$.

1.33. Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ spełniają następujące zależności:

$(4\vec{A}-5\vec{B})\perp(2\vec{A}+\vec{B})$,
$(7\vec{A}-2\vec{B})\perp(\vec{A}-4\vec{B})$.

Wyznaczyć kąt pomiędzy wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

1.34. Znaleźć wektor jednostkowy $\vec{n}$ prostopadły do wektora $\vec{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ i $\vec{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

1.35. Dane są trzy wektory: $\vec{A}=[3 \quad 3 \quad -2]$, $\vec{B}=[-1 \quad -4 \quad -2]$, $\vec{C}=[2 \quad 2 \quad 1]$. Znaleźć iloczyn $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$. Czy wektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ leżą w jednej płaszczyźnie?

1.36. Współrzędne biegunowe $[r \quad \varphi]$ dwóch punktów na płaszczyźnie wynoszą $[2{,}5 \quad 30°]$ i $[3{,}5 \quad 120°]$. Wyznaczyć współrzędne kartezjańskie punktów oraz odległość pomiędzy nimi.

1.37. W układzie biegunowym, współrzędne $[r \quad \varphi]$ trzech punktów wynoszą: $[3 \quad \pi/6]$, $[3 \quad 2\pi/3]$ i $[3 \quad 3\pi/2]$. Znaleźć wektory położenia tych punktów w układzie kartezjańskim oraz obliczyć ich sumę.

1.38. Stałe siły $\vec{F}_1=[1 \quad 2 \quad 3]$ oraz $\vec{F}_2=[\lambda \quad -5 \quad -2]$ działają równocześnie na cząstkę w czasie jej przesunięcia z punktu $\vec{r}_1=[5 \quad -5 \quad 0]$ do punktu $\vec{r}_2=[1 \quad 0 \quad -3]$.

a) Dla jakiej wartości parametru λ praca wykonana przez siłę $\vec{F}_2$ wynosi zero?
b) Dla jakiej wartości parametru λ, praca wykonana przez siłę wypadkową wynosi zero? Jaka jest interpretacja tego faktu?

1.39. Siła $\vec{F}=[-2 \quad 3 \quad 5]$ działa na ciało znajdujące się w punkcie $\vec{r}_1=[5 \quad 3 \quad 1]$. Obliczyć:

a) moment siły względem początku układu współrzędnych,
b) moment siły względem punktu $\vec{r}_2=[0 \quad 10 \quad 0]$.

1.40. Gdy cząstka znajdowała się w położeniu $\vec{r}_1=[-2 \quad 4 \quad 3]$, jej pęd wynosił $\vec{p}=[1 \quad 3 \quad -2]$. Jaki był wtedy moment pędu $\vec{L}$ cząstki względem początku układu współrzędnych oraz względem punktu $\vec{r}_2=[3 \quad 5 \quad -1]$?

1.41. Łódka ma przepłynąć przez rzekę, która płynie z prędkością $v=4\,\text{km/h}$. Pod jakim kątem sternik powinien skierować łódź, jeżeli łódka ma przepłynąć strumień prostopadle do jego brzegów, a prędkość łódki względem wody wynosi $u=8\,\text{km/h}$? Jaka będzie prędkość łódki względem brzegów?

1.42. Dwie cząstki poruszają się wzdłuż osi x i y odpowiednio z prędkościami $\vec{v}_1=2\cdot\vec{i}$ m/s i $\vec{v}_2=3\cdot\vec{j}$ m/s. W chwili $t=0$ cząstki znajdują się odpowiednio w punktach o współrzędnych: $x_1=-3\,\text{m}$, $y_1=0\,\text{m}$, oraz $x_2=0$, $y_2=-3\,\text{m}$. Znaleźć wektor $\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ określający położenie drugiej cząstki względem pierwszej w funkcji czasu. Kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie?

1.43. Prędkości dwóch ciał opisane są równaniami: $\vec{v}_1=[4t \quad -3]$, $\vec{v}_2=[-3 \quad 4t]$. Wyznaczyć chwile czasu, gdy ciała te poruszają się równoległe oraz prostopadle względem siebie.

1.44. Dwa samochody poruszają się z prędkościami $v=40\,\text{km/h}$ po ulicach krzyżujących się pod kątem prostym. Ile wynosi prędkość jednego samochodu względem drugiego?

1.45. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie znalazły się w położeniach $\vec{r}_1=[1 \quad 2 \quad 3]$ i $\vec{r}_2=[3 \quad 4 \quad 5]$. Obliczyć:

a) długości tych wektorów,
b) wektor przemieszczeni drugiej cząstki względem pierwszej,
c) iloczyny: $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$, $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$,
d) kąty pomiędzy wektorami $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$.

1.46. Dane są dwa wektory: $\vec{A} = \begin{bmatrix} 3\tau & 4\tau^2 & \sin\tau \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} -\tau & -\sin\tau & 0 \end{bmatrix}$, gdzie τ jest pewnym parametrem. Sprawdzić poprawność reguły różniczkowania iloczynu skalarnego dwóch wektorów:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}\tau}.$$

1.47. Dane są dwa wektory: $\vec{A} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & \sin\tau \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 3 & \tau^2 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie τ jest pewnym parametrem. Sprawdzić poprawność reguły różniczkowania iloczynu wektorowego dwóch wektorów:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\tau}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}\tau}.$$